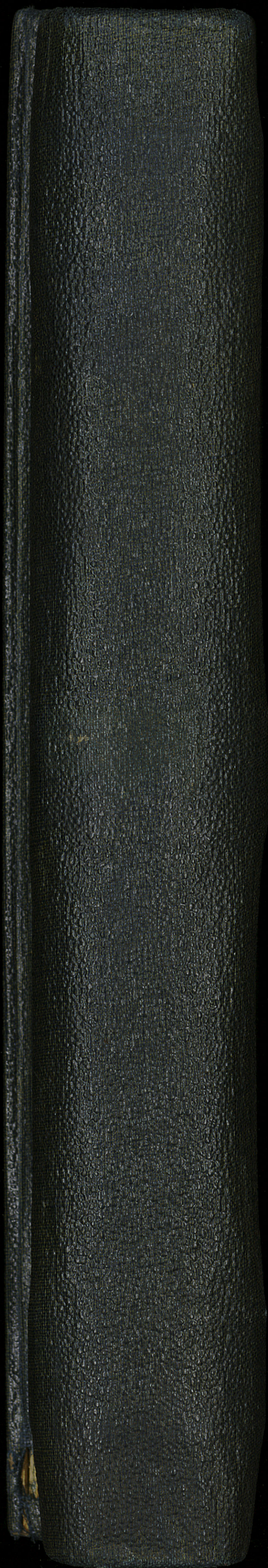
colorchecker CLASSIC

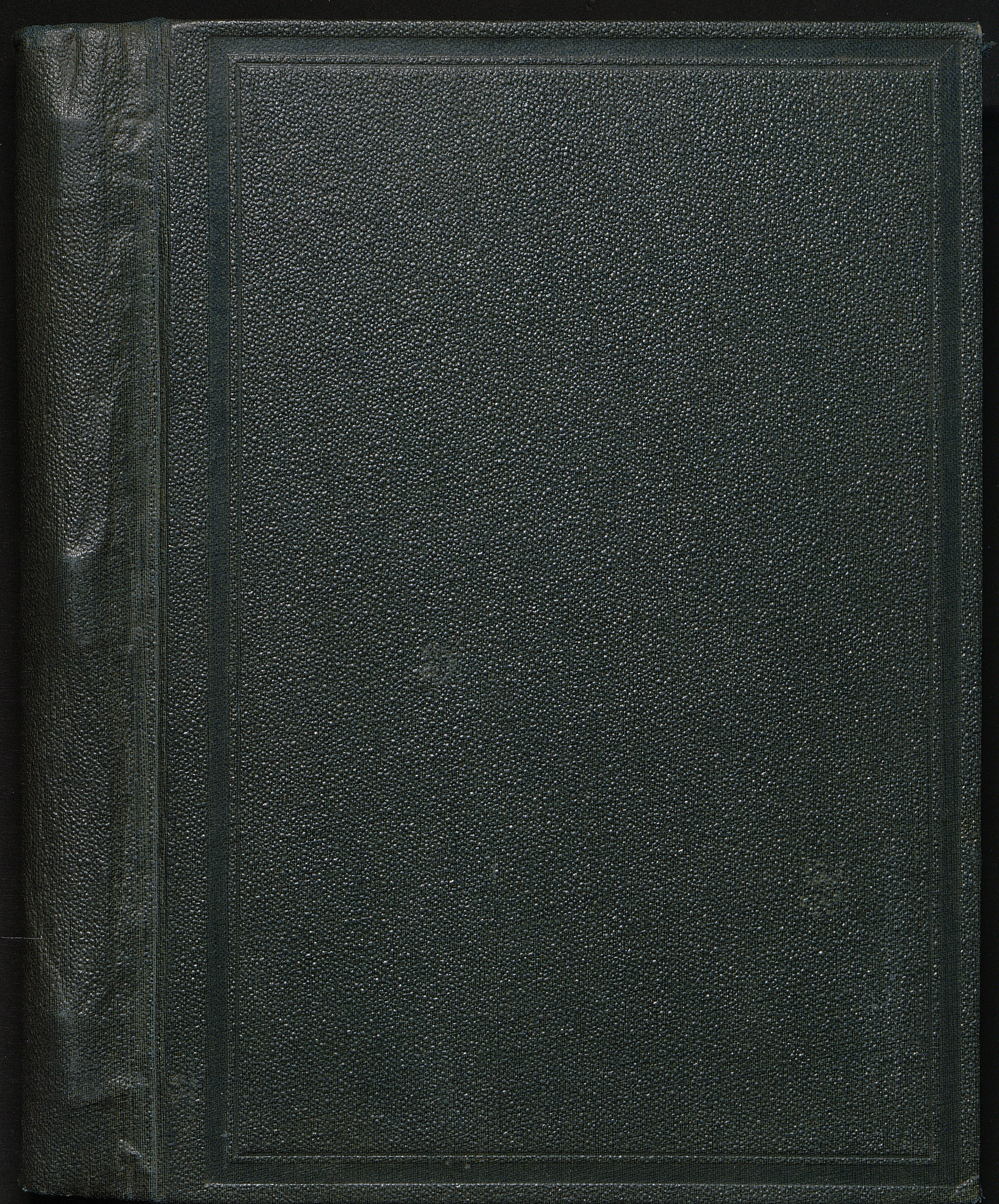





x·rite







PAPETERIE REGISTRES
Spécialité pour Collèges
AUFFROY Jne
61, rue Caumartin, PARIS



RELIURE ÉLECTRIQUE OU INSTANTANÉE

I. F.

Exiger la Marque de Fabrique PARIS-LONDON
Patent

MODE D'EMPLOI

De la main gauche soulever un des côtés en appuyant l'intérieur de l'autre sur le bureau; le dos se trouvant ainsi ouvert, la main droite sert à introduire ou retirer les papiers.

Laisser la reliure revenir sur elle-même et les papiers se trouvent fixés.

N.-B. — La chemise renfermée dans chaque reliure n'est pas indispensable, mais elle facilite l'introduction des papiers.

RELIURE ÉLECTRIQUE

Servant à relier soi-même sans difficulté, les papiers, manuscrits, documents, etc.

	FORMAT	HAUT.	LARG.
Nº 0	....	22 ×	14
» 1	In-8º..............	24 ×	16 1/2
» 2	In-4º..............	29 ×	21
» 3	Musique............	36 ×	26
» 4	Ministre...........	32 ×	22
» 5	In-8º Jésus........	28 ×	18
» 6	Journal illustré, etc..	40 ×	28
» 7	Quadrille..........	28 ×	36
» 8	Traite Mandat......	13 ×	29
» 9	Journaux illustrés grd format..........	46 ×	33

I. F.

PARIS, LONDON

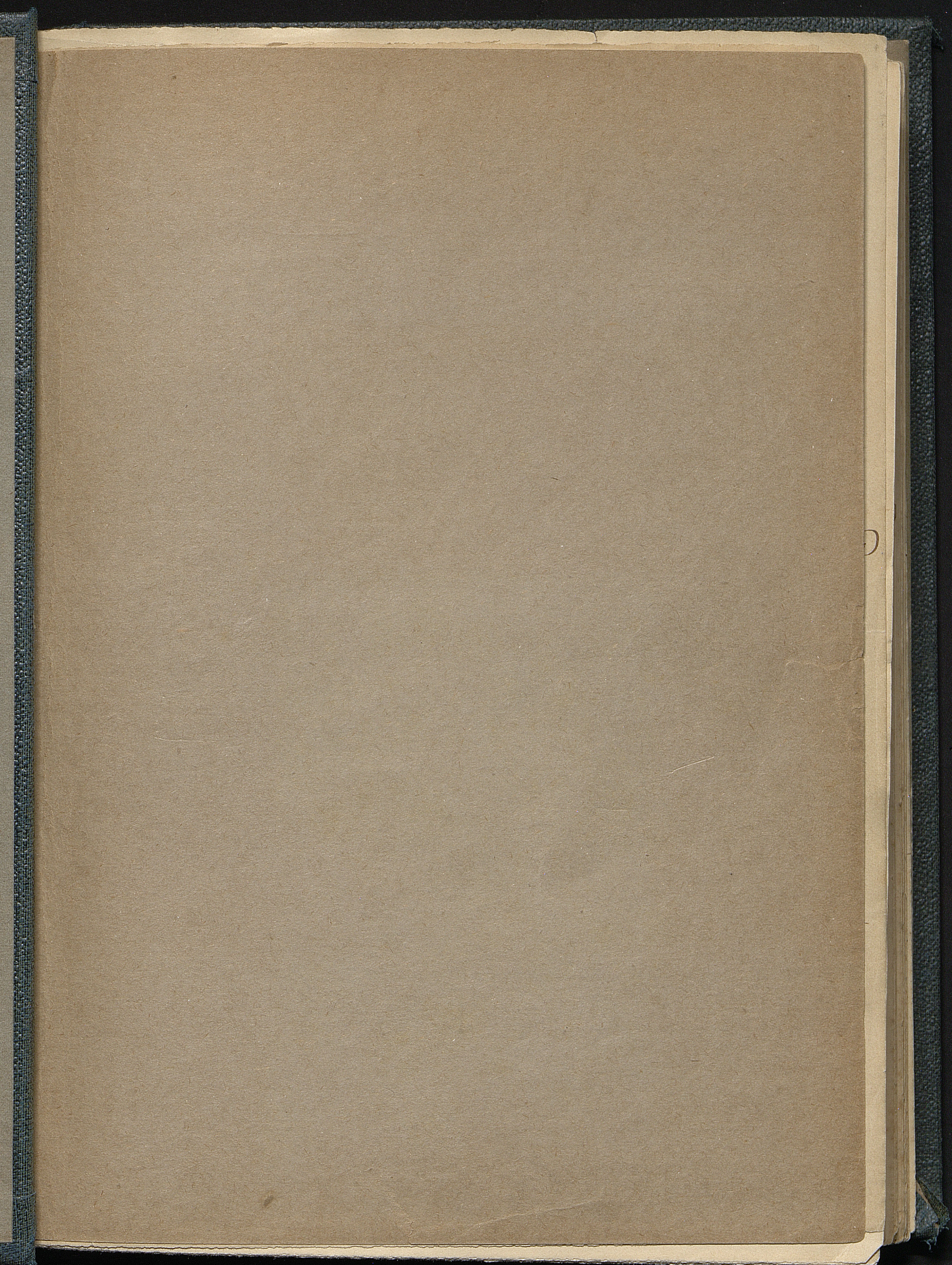
PATENT

Spécialité d'Articles anglais pour Bureaux

Nº 1

Toute reliure non revêtue de la signature ci-dessous n'est pas la véritable reliure électrique

J. Frank





Cours de Philosophie des Sciences.

I. Mathématiques pures.

1897-1898

(Caen).

Mach - Schröder.

~~Russell~~ - Whitehead

~~Mach : Thermologie~~ Cantor.

~~Mach : Mécanique~~ Peano.

Vailati.

Portuondo : Infini. Halsted.

Appell : Potentiel.

Notes de Math. et de Physique



Ms 128

I. Science du nombre : 1. Théorie nominaliste.
2. Théorie rationaliste.
Méthode : principe de l'induction complète.
Opérations primitives de l'arithmétique. Fondement des combinaisons de nombres : l'intuition.
Systèmes de numération ; opérations pratiques.
Problèmes d'arithmétique : algèbre indéterminée.
Théorie des nombres ; congruences.
Arithmétique générale : généralisation du nombre
Nombres complexes à n dimensions.

II. Science de l'ordre : Théorie des ensembles. (Types d'ordre)
Nombres ordinaux et cardinaux de Cantor.
Ensembles dérivés. Le continu numérique
Théorie des permutations, arrangements et ~~combinaisons~~. ~~Nomb~~ Binôme. Déterminants.
Nombres figurés
Théorie des substitutions.
Théorie des chances ; calcul des probabilités.
Théorie des suites, ~~et~~ séries et produits infinis.
~~Nombres figurés~~. Convergence ; limite.

III. Science de la grandeur : Axiomes de la mesure des gr.
Théorie des fonctions. Dérivées et différentielles
Quadratures, intégrales. Equations diff. & aux dér. part.

Algèbre : méthode : équations ; ~~substitutions~~.
Etude des polynômes entiers (analogies avec n entiers)
Formes algébriques. Invariants (Clebsch)
Nombres algébriques : ~~nom~~ idéaux (Dedekind)

Le raisonnement mathématique est-il réductible au syllog

Réserver pour la fin du cours l'étude des relations entre les
diverses branches de la Math. pure par ex. relations entre
Théorie des nombres, la Th. des chances et celle des Fonct
ou le Calcul infinitésimal.

Question : L'idée de nombre et celle d'ordre reposent-elles
sur une intuition, comme l'idée de grandeur ? Cela
expliquerait pourquoi les ~~vérités~~ lois arithmétiques sont vrais
Géométrie (par ex. relations entre les nombres de faces, d'ar
et de sommets des polyèdres ; application des combinaisons
des probabilités à l'espace.)

Peut-être le nombre et l'ordre reposent-ils sur l'intuition
grandeur. Peut-être aussi peut-on construire la grandeur av
le nombre et l'ordre, avec des nombres ordonnés.

On réservera par conséquent pour la fin du cours la question des
relations de l'idée de nombre avec l'espace et le temps.

Expliquer pourquoi la Théorie des nombres a recours à l'Algèbre
et à l'Analyse, c.à.d. au nombre généralisé, à l'ordre et à la grand

Pourquoi la question de méthode a-t-elle été négligée ? C'est que
Math. elle-même est une méthode, une Logique, un Organon.
D'autre part (et pour la même raison) la question métaphysi
ne se pose pas : car il n'est jamais question ~~de~~ la Math. ~~en tant~~ objet
il s'agit par de savoir

L'idée de l'ordre est indépendante de l'espace et du temps ; ainsi une per
n'implique aucun ordre sensible entre les objets, mais une simple corresp
entre les objets et leurs places (disposées d'une manière quelconque)

Leçon d'ouverture.

Rapports traditionnels de la philosophie ~~et des~~ sciences : Thalès, Pythagore, Platon ; Descartes, Leibnitz, Kant. – Divorce avec ~~Cousin~~ les sensualistes du XVIIIe s. les idéologues et Cousin. D'où positivisme : la science niant la philosophie s'érige en philosophie. La philosophie ne serait que l'ensemble des vérités les plus générales des sciences. Admettons ce point de départ.

La 1e question qui se pose est celle de la méthode : comment conduire son esprit pour arriver à la vérité dans les sciences ? Cette question ne relève d'aucune science particulière : car le savant applique inconsciemment les méthodes ; quand il réfléchit sur elles, il n'étudie plus la nature mais l'esprit ; il fait œuvre de philosophe : D'où la Logique. Si elle diffère de la Logique classique, c'est que ~~celle-ci n'est que~~ la logique de Aristote, n'a de valeur scientifique que dans son système (où les ~~qualités réelles~~ choses s'expliquent par des combinaisons de qualités ~~réelles~~ [sing]) Le syllogisme n'a plus d'utilité dans les sciences, mais seulement dans la morale et le droit, où les concepts gardent leur valeur.

2e question : L'étude des méthodes conduit aux principes et aux concepts fondamentaux des sciences : or ces principes et concepts, la science les postule, et ne les explique ni ne les fonde. Rechercher leur valeur, leur origine, est l'œuvre de la Critique. La question critique par excellence est celle-ci : Faire la part de l'a priori et de l'a posteriori dans la connaissance. Elle aboutit à une Théorie de la connaissance. Elle ne

cherche plus comment nous connaissons, mais ce que nous pouvons connaître, soit a priori, soit par expérience.

3e question. La Critique ayant fait le départ de ce qui dans la connaissance vient de l'esprit et de ce qui vient de l'expérience, suggère une 3e question: Que sont les choses? D'abord, y a-t-il des choses? ~~L'expérience~~ De la nécessité de l'expérience on peut conclure à l'existence des choses. De plus de la nature des impressions qu'elles font sur nous on peut inférer leur nature. En tout cas, on ne peut connaître les choses en soi que par ~~les~~ ces impressions – La science n'a pour objet que les phénomènes et leurs rapports; la ~~vraie~~ connaissance des choses en soi dépasse la science: c'est la Métaphysique (2)

Ainsi la Philosophie des sciences est toute la Philosophie spéculative: théorie de la connaissance et de l'être; philosophie de la nature et de l'esprit. Mais la Psychologie? C'est une science expérimentale, et comme telle, elle est subordonnée à la Philosophie: 1° parce que, comme toute science, elle est relative à l'esprit; 3° parce qu'elle considère l'homme comme un objet et à des lois; elle fait partie de l'Anthropologie: elle peut expliquer empiriquement ses ~~sensations~~, ses sentiments, ses actes, ses mœurs, mais non sa pensée: la théorie de la connaissance lui échappe (1) 2° parce qu'elle repose sur un cercle vicieux, en supposant ~~donnés~~ les objets réels ~~et donnés~~ hors de nous pour expliquer les idées que nous en avons (espace par ex); 4° parce qu'elle aboutit à des lois physiologiques, et explique la pensée par le cerveau (~~matérialisme~~ roman physiologique) pétition de principe matérialiste. Même critique pour l'évolutionnisme, qui explique par l'histoire et la zoologie ~~l'homme comme un~~ animal, c.à.d. fait de l'esprit un produit de la nature, subordonne le sujet à l'objet. Autorités: Spinoza, Kant, M. Lachelier.

(1) Les lois psychologiques ne sont pas les lois logiques: elles n'expliquent ni ne fondent la vérité; elles ne permettent pas de distinguer le savant de l'imbécile, l'homme de génie du fou

Ces systèmes usurpent en vain l'autorité de la science : la vraie science est idéaliste ; c'est elle qui en dépouillant les corps de leurs qualités sensibles nous oblige à renoncer au réalisme naïf du vulgaire et à nous demander ce qu'ils sont en eux-mêmes. Elle dissout même le concept de matière, et ruine par suite le matérialisme des faux savants. ~~Elle enrichit au contraire~~ Loin de réduire la conscience au cerveau, elle l'enrichit des dépouilles du monde sensible ; elle transpose le mystère de la nature en le transportant dans l'esprit. Œuvre de la pensée, elle témoigne de sa réalité, et fait présumer que toute autre réalité procède de celle là. (1) Loin de supprimer les problèmes philosophiques, c'est elle qui les pose ; la philosophie n'est pas une science opposée à la science et rivale, la science de l'esprit à côté de la science des corps ; elle ~~se~~ se suppose à la science, et y trouve son plus solide fondement.

(2) Nécessité de ces 3 Parties, et surtout de la Critique qui doit même servir de base à la Logique. ~~Sans elle, la philosophie Logique n'est qu'un ensemble de généralités~~ Sans elle, la Logique reste vague, comme dans le positivisme : ~~résumé~~ ensemble de généralités scientifiques, résumé encyclopédique des sciences ; et la Métaphysique est vaine, comme dans l'évolutionnisme qui généralise sans critique les lois ou hypothèses : mécanisme universel ; princ. de la cons. de l'énergie ; théorie de l'évolution, lutte pour la vie, hérédité.

(1) L'esprit qui pense ne peut se connaître par l'introspection, car il se transforme alors en objet ; d'ailleurs, ses procédés sont inconscients. Il ne peut se connaître que par réflexion dans ses œuvres ; c'est pourquoi la philosophie est une réflexion sur la science.

Première leçon

Définir les mathématiques pures, ~~[illegible]~~ Ce n'est pas au sens kantien : pur = a priori qui ne contient rien d'empirique. Ce n'est pas le sens traditionnel des mathématiciens, qui prenaient *pur* pour synonyme de *rationnel*, et l'opposaient à expérimental : la Géométrie et la Mécanique étaient des math. pures. — Les mathématiciens modernes sont revenus sur cette classification : ils considèrent la G. et la M comme des sciences expérimentales, et réduisent les Math. pures à l'Analyse. Peut-être vont-ils trop loin, et méconnaissent-ils la part d'a priori dans ces sciences, qui autrement ne seraient plus *math.* mais *physiques*. En tout cas, la G. et la M. reposent sur l'intuition de l'espace et du temps : que cette intuition soit empirique ou a priori, elle suffit à distinguer ces sciences des Math. purement *rationnelles*, qui sont évidemment plus simples, plus abstraites et plus générales.

Celles-ci ont pour objet 3 idées fondamentales : le nombre, l'ordre et la grandeur. Les mathématiciens modernes croient pouvoir les réduire à une seule : le nombre ; mais c'est là une conception philosophique qu'on discutera plus tard. Renvoyer à la fin du cours la question de savoir si ces 3 idées sont irréductibles : si, dans le cas où elles ~~sont~~ seraient indépendantes, elles ont la même importance et la même généralité ; et dans le cas contraire, lesquelles doivent se réduire aux autres. Ce sera la conclusion naturelle du cours.

Théorie nominaliste du nombre (d'après les mathématiciens B

Helmholtz, Kronecker, Dedekind

Système de nombres ordinaires, c.à.d. signes ou numéros de B

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ tous différents (~~sans que~~ équivoque et périodicité

Sens unique ~~Définition de l'égalité et de l'inégalité.~~

Cette suite doit être illimitée, pour pouvoir s'appliquer à toutes les collections possibles d'objets. Comme la mémoire ne pourrait retenir un trop grand nombre de signes, on a adopté la règle de combinaison progressive: $\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \ldots$

$\beta\alpha, \beta\beta, \beta\gamma, \ldots\ldots$

Définition de l'égalité et de l'inégalité (supérieur, inférieur

~~Définition de l'addition:~~ ~~$\alpha + 1$~~ $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta$

Axiomes de l'égalité et de l'inégalité. $\alpha\ \beta\ \gamma$

Sens unique: En vertu de l'ordre même de la suite normale, à chaque nombre a correspond le nombre suivant, qu'on désignera par a'

(L'inverse n'est pas vrai: 1 n'est précédé d'aucun nombre

C'est même en cela que consiste l'infinité de la suite. A

Induction complète: Elle se reproduit tout entière par substitution de a' à a qu

Définition de l'addition: $a + 1 = a'$

(par induction complète) Dedekind $(a+n)' = a + n'$

ou: $(a+n)+1 = a+(n+1)$

On peut illustrer cette définition par la correspondance des

$a', a'', a''', \ldots\ldots c$ ~~$a', a'', a''', \ldots\ldots b$~~ $c = a + b.$

$1, 2, 3, \ldots\ldots b$

De l'axiome de Grassmann: $(a+b)+1 = a+(b+1)$

on déduit: 2° La loi ~~commutative~~ associative: ~~$a+b = b+a$~~ ~~$(a+b)+c = a+(b+c)$~~ $(a+b)+c = a+(b+c)$

par induction complète. A. Elle est vraie pour $c = 1$;

~~B. Si elle est vraie pour n, elle est vraie pour $(n+1)$:~~

~~$(a+b)+n = a+(b+n)$~~ | ~~$(a+b)+(n+1) = a+(b+n+1)$~~

B. Si elle est vraie pour $c = n$, elle l'est pour $c = n+1$: | ~~$(a+b)+(n+1) = (a+b+n)+1$~~

~~$a+(b+n+1) = (a+b+n)+1$~~

Hypothèse : $(a+b)+n = a+(b+n)$

Thèse : $(a+b)+(n+1) = a+[b+(n+1)]$

Dém. : ~~$(a+b+n)+1 = a+(b+n+1)$~~

$$(a+b)+(n+1) = (a+b+n)+1$$
$$(a+b+n)+1 = a+(b+n)+1$$
$$a+(b+n)+1 = a+(b+n+1)$$
$$a+(b+n+1) = a+[b+(n+1)]$$

2° Loi commutative : $a+1 = 1+a$.

A vrai pour $a = 1$; B : si elle est vraie pour $a = n$, elle l'est pour $a = n+1$.

$n+1 = 1+n$

$(n+1)+1 = 1+(n+1)$ | $(n+1)+1 = (1+n)+1 = 1+(n+1)$.

$$a+b = b+a$$

A Vraie pour $b = 1$; B. si elle est vraie pour $b = n$, elle l'est pour $b = n+1$.

Hyp. $a+n = n+a$.

Th. $a+(n+1) = (n+1)+a$

$$\begin{cases} a+(n+1) = (a+n)+1. \\ (a+n)+1 = (n+a)+1 \\ (n+a)+1 = n+(a+1). \\ n+(a+1) = n+(1+a) \\ n+(1+a) = (n+1)+a. \end{cases}$$

Lois associative et commutative généralisées.

Définition de la multiplication : $\begin{cases} a\times 1 = a, \\ a\times(n+1) = an+a. \end{cases}$

1° Loi commutative : $a\times 1 = 1\times a$

Vrai pour 1. Si elle est vraie pour $a = n$, elle l'est pour $a = n+1$.

$n\times 1 = 1\times n$ | $(n+1)\times 1 = 1\times(n+1)$

~~$(n\times 1)+1 = (1\times n)+1$~~ | ~~$n+1 = (1\times n)+1$~~

$(n\times 1)+1 = (1\times n)+1$ | ~~$(n+1)\times 1 = (n\times 1)+1$~~

$n+1 = 1\times(n+1)$ | ~~$(n+1)+1$~~

$(n+1)\times 1 = 1\times(n+1)$



3° *Loi associative.* $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

Vraie pour $c=1$: $(a\times b)\times 1 = a\times(b\times 1)$

Si elle est vraie pour $c=n$, elle l'est pour $c=n+1$:

$(a\times b)\times n = a\times(b\times n)$ $\qquad (a\times b)\times(n+1) = a\times[b\times(n+1)]$

Même démonstration que pour l'addition.

$(ab)n = a(bn)$ $\qquad (ab)(n1) = (abn)1 = [a(bn)]1 = \{a[(bn)1]\} =$

1° *Loi distributive* par rapport à l'addition:

$(a+b)c = ac+bc$

Vraie pour $c=1$; $\qquad (a+b)\times 1 = a\times 1 + b\times 1$ (…

Si elle est vraie pour $c=n$, elle l'est pour $c=n+1$:

$(a+b)n = an+bn$ $\qquad (a+b)(n+1) = a(n+1)+b(n+1)$

$(a+b)(n+1) = (a+b)n+(a+b) = an+bn+(a+b) = an+a+bn+$…
$= a(n+1)+b($…

Définition de la puissance $\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n\times a \end{cases}$

$a^m\times a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad a^m\times b^m = (ab)^m$

Cette théorie fonde toute la science des nombres sur l'idée d…
Il n'y est pas une seule fois question du nombre cardinal; c…
pourquoi l'on ne définit pas l'addition: ajouter n unités à un…
la multiplication: répéter n fois un nombre; la puissance: prod…
de n nombres égaux. Toutes les opérations se réduisent à d…
combinaisons de signes; ne sont définies que par leurs propriétés.
Tout repose sur le lien établi entre chaque nombre et le suivant.
Reste à savoir comment le nombre cardinal se conçoit et s'…
dans cette théorie.

Loi commutative de la multiplication. $\qquad a\times b = b\times a$

Vraie pour $b=1$; si elle est vraie pour $b=n$, elle l'est pour $b=$…

Hp: $an = na$ $\qquad a(n+1) = an+a$

Th: $a(n+1) = (n+1)a$ $\qquad (n+1)a = an+a$ (en vertu de la loi distributive)

2e leçon

Définition du nombre cardinal dans la théorie ordinale

Pour dénombrer une collection donnée, on applique à chacun de ses éléments ~~le~~ un nombre ordinal ~~dans~~ suivant l'ordre normal. Le dernier des nombres employés n est le nombre cardinal de la collection. ~~Définition cardinal de l'addition coïncide avec définition ordinale~~

C'est en même temps le nombre des nombres employés.

Il faut démontrer alors que le nombre cardinal d'une collection donnée est indépendant de l'ordre assigné aux éléments dans le dénombrement. Postulat de l'invariance du nombre cardinal (Schræder)

Démonstration de Kronecker : On reprend les nombres déjà employés, on intervertit leur ordre et on les applique de nouveau aux mêmes objets disposés dans le même ordre. Comme l'ensemble des nombres employés n'a pas changé, le nombre des objets numérotés est le même.

Réfutation : 1° On suppose que le nombre des nombres employés reste le même quand on change leur ordre : or leur nombre cardinal n est relatif à leur ordre, puisque c'est le dernier d'entre eux. ~~on suppose on implique~~ Il faudrait donc que le théorème fût démontré d'abord pour les nombres eux-mêmes, c.à.d. que les nombres de 1 à n, pris dans un ordre quelconque, correspondent encore aux nombres de 1 à n dans l'ordre normal.

2° On suppose que l'ensemble des nombres employés ~~est~~ n'a pas changé : cela ne serait vrai que si chaque nombre correspondait encore au même objet, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dira-t-on qu'on les applique dans leur ordre numérique (de 1 à n) mais sans ~~ob~~ observer l'ordre des objets ? Mais alors rien ne prouve que la répartition s'effectue sans omission ni répétition. Au fond, on suppose que le nombre des objets reste le même entre les 2 opérations : on implique une idée de nombre cardinal, étrangère à la définition.

Démonstration de Helmholtz. La suite normale des nombres restant fixe, on y applique la collection donnée, de 1 à n; par là même, on lui assigne un ordre, et elle a le nombre n pour cet ordre. Soit un autre ordre quelconque: la collection couvrira-t-elle encore les mêmes nombres ordinaux? (Prenons des lettres)

1° On peut permuter 2 lettres quelconques sans changer le nombre cardinal de la collection: car chaque lettre correspond à un nombre ordinal qui était couvert antérieurement; on n'en a pas découvert, ni couvert un nouveau. Et la collection est restée identique à elle-même.

2° Par des permutations successives de 2 lettres on peut passer d'un ordre donné à un autre ordre donné quelconque. En effet, on amènera successivt le 1er, le 2e, le 3e ~~terme~~ élément à leur rang. Après un nombre fini de permutations, il ne restera plus que le $(n-1)^e$ et le n^e, qu'on amènera à leur place, s'il y a lieu par une dernière permutation (Helmholtz se restreint aux permutations de 2 lettres voisines, ce qui n'est pas nécessaire)

~~Remarque. Cette démonstration suppose que la collection est finie, c.à.d. qu'elle a un dernier élément.~~

Selon Helmholtz, cette démonstration ne fait pas appel à l'expérience externe comme la définition cardinale de l'addition; elle repose sur l'intuition interne. Et en effet, il fait 2 fois appel à l'intuition: 1° pour prouver que le nombre ne change pas quand on permute 2 éléments; 2° pour prouver que l'on peut passer d'un ordre à un autre par une suite de permutations.

[Kronecker fait appel à l'intuition d'une manière bien plus flagrante, pour les lois commutatives de l'addition et de la multiplon] Au fond, il ramène sa démonstration à la constatation intuitive du théorème pour $n = 2$: le nombre de 2 objets ne change pas quand on les permute. ~~Pourquoi? Est-ce un fait d'expérience inte~~

D'autre part, cette démonstration repose sur l'idée d'unité, et sur l'identité des unités (les objets ne doivent pas s'unir ni se dédoubler, ni disparaître) La réduction des objets à des unités est déjà impliquée dans la correspondance univoque (un à un) des objets aux nombres. Les nombres eux-mêmes, simples signes d'ordre, sont conçus chacun comme unité; ~~et par suite l'ensemble des nombres ordinaux~~ la définition ordinale de l'addition suppose qu'on les applique un à un. L'idée d'unité se trouve ~~même~~ déjà impliquée dans la définition même de la suite normale: car à chaque nombre correspond un suivant, et un seul (sans quoi la suite ne serait pas linéaire) Bien mieux: il faut qu'il y ait un premier nombre, et par conséquent le ~~chiffre 1 signifie un~~ premier nombre est un

Autre définition du nombre cardinal (Stolz, Dedekind) On part de la notion de pluralité ou d'ensemble. On définit: pluralités équivalentes celles entre lesquelles on peut établir une correspondance univoque et réciproque (élément à élément) On range toutes les pluralités équivalentes dans une seule classe: on remarque qu'elles sont équivalentes à la suite des nombres ordinaux de 1 à n: cette suite étant définie par le dernier nombre n, celui-ci est pris pour représentant de la classe, et est le nombre cardinal de tous les ensembles de la classe. _ Ou bien on fait correspondre chaque classe à un ensemble de signes 1 (pluralité d'unités, Stolz) — Mais tout cela cache une pétition de principe: toute correspondance suppose que l'on attribue l'unité aux éléments qu'on fait correspondre. Or si l'on conçoit une

Le dénombrement suppose donc que l'on réduit par la pensée la collection à une pluralité d'unités, c.à.d. à son nombre. Ainsi le nombre est antérieur au dénombrement.

collection donnée comme une pluralité d'unités, on en conçoit ipso facto le nombre, on la conçoit comme nombre.
Un ensemble de nombres ordinaux ou de chiffres 1 n'est un nombre qu'à cette condition : il est donc inutile de les employer à définir le nombre, car il y est impliqué d'avance.
— Le nombre n'est donc pas le produit d'une abstraction portant sur plusieurs collections équivalentes : — ni d'une abstraction portant sur les éléments d'une collection. L'unité n'est pas ~~donc~~ une qualité des choses, donnée dans la perception sensible ; elle est ~~imp~~ prêtée et imposée plus ou moins arbitrairement par l'esprit. Elle naît de l'acte de penser chaque chose à part.
— L'unité doit aussi être appliquée à la collection entière, pour la totaliser ; c'est elle qui unit les unités et transforme la pluralité en nombre. Cette application de l'unité n'est pas plus arbitraire que la 1re : les unités constituantes du nombre sont toujours complexes.
Le nombre est l'unité d'une pluralité d'unités.
— Il est indépendant de l'ordre des unités, et ne suppose même pas qu'elles en aient un : d'où l'invariance évidente du nombre cardinal.
Il est aussi indépendant des autres nombres : les nombres n'ont pas par eux-mêmes aucun ordre : chacun existe à part, en lui-même.
Le nombre ne doit pas être défini une somme d'unités : car cela suppose l'idée d'addition, qui présuppose l'idée même de nombre.
De plus, pour sommer les unités intégrantes d'un nombre, il faudrait savoir combien en prendre, c.à.d. connaître ce nombre.
— On peut néanmoins, non pas construire les nombres, mais les ranger en adoptant la loi de formation par addition de l'unité à elle-même.
Le nombre un n'est pas l'unité : c'est le n qui ne comprend qu'une un[ité]
— On peut dire alors que chaque nombre est la somme du précédent et d[e 1]
mais dans un sens tout différent que dans la théorie ordinaire.
On retrouve ainsi la suite vraiment naturelle des nombres point de départ de la th. ordinale. Reste à définir les opérations.
+ Le principe de l'induction complète conserve donc sa valeur dans notre [théorie]

$$20ab > 100(2a+1)$$

$$2ab > 20a + 10$$

$$2ab - 20a > 10. \qquad 2ab > 20a$$

$$2a(b-10) > 10. \qquad b > 10.$$

$$10a + b$$
$$10a' + b'$$

$$100aa' + 10(ab' + a'b) + bb'.$$

~~$100(a+1)a'$~~

$$100aa' + 100a' \qquad \frac{ab' + a'b}{10} > \frac{a'}{10}$$

$$ab' > a'(10-b)$$

$$100aa' + 200a' + 10(ab' + b' + a'b) + bb'.$$

1071
1088
988
9
189

Monsieur et Cher Camarade,

J'ai l'honneur de vous annoncer

L'ordre introduit dans le dénombrement [illegible]
nullement inhérent à l'idée du nombre ob[illegible]
c'est le moyen le plus pratique de s'assurer q[illegible]
ne commet ni omission ni répétition. C[illegible]
aussi le meilleur moyen de former sans erre[illegible]
le nom de nombre cherché (en énumérant
tous les précédents) Mais on peut aussi co[illegible]
les objets deux par deux, trois par trois, [illegible]
met entre eux un ordre non linéaire.

— Ce qui ~~fait que~~ distingue pratiq.t les opérations
l'algorithme : ainsi l'élévation aux puissance[illegible]
distingue peu de la mult.on ~~[illegible]~~ tandis que l'extrac[illegible]
racines se distingue de la division. La mult.on
~~et~~ se ramener à une addition répétée, ~~comme~~ [illegible]
[illegible] soustraction répétée.

3e leçon

L'idée de nombre est antérieure au dénombrement. A quoi donc sert celui-ci ? A trouver le nom du nombre déjà pensé ou du moins implicitement déterminé, et sa représentation en chiffres. Or la numération, parlée et écrite, suppose non seulement la notion de nombre mais la connaissance des opérations fondamentales. Il faut donc définir ces opérations avant toute numération. Reprenons les formules qui les définissent ds la th. ordinale :

$a+1=a'$	$a\times 1=a$	$a^1=a$
$a+(n+1)=(a+n)+1$	$a(n+1)=an+a$	$a^{n+1}=a^n\times a$.

et d'où l'on a déduit les formules générales :

$a+b=b+a$	$a.b=b.a$	$a^b.a^c=a^{b+c}$
$a+(b+c)=(a+b)+c$	$(a.b)c=a(b.c)$	$(a^b)^c=a^{bc}$
	$(a+b)c=ac+bc$	$(ab)^c=a^cb^c$.

Les formules fondamentales se justifient ds la th. cardinale : car nous avons retrouvé la suite naturelle des nombres, mais avec un autre sens : au lieu de définir $(a+1)$ par le nombre qui suit a, nous ~~plaçons~~ rangeons après a la somme de a et de 1. La somme de plusieurs nombres est la ~~nombre~~ collection de toutes les unités qui constituent ces nombres. Cette définition étant indépendante de l'ordre des nombres composants, les lois commutative et associative deviennent évidentes. + Comme l'idée de nombre, l'idée de somme (de l'addition) repose sur l'idée de collection. Ce n'est pas une collection de nombres, mais d'unités : aussi faut-il décomposer les nombres à sommer et réunir leurs unités dans une nouvelle synthèse, en former une nouvelle unité (Kant).

+ Identité avec la définition ordinale. On peut encore démontrer la loi commutative au moyen de l'invariance du nombre card

Définition de l'inégalité. Deux nombres égaux sont identiques, on s'en assure par la correspondance univoque et réciproque (N.B.) Si la correspondance une fois établie, (c'est un critérium, non une définition) il reste des unités de l'une des collections, c'est elle qui aura le plus grand nombre. Il est évident que ce nombre est la somme du plus petit et d'un autre, composé des unités restantes : c'est la différence ou l'excès. Ainsi deux nombres inégaux ont une différence.
Réciproque : deux nombres qui ont une différence sont inégaux.
N.B. : Il ne faut pas prendre ce théorème pour définir l'inégalité.
Conséquence : De deux nombres inégaux, le plus grand vient après l'autre dans la suite naturelle. On retrouve ainsi la définition ordinale de l'inégalité.

Définition de la multiplication : Le produit de a par b est la somme de b nombres égaux à a. La loi commutative n'est pas évidente, les 2 facteurs ne jouant pas un rôle symétrique. Mais les 2 formules fondam. se déduisent de cette définition.
Démonstration intuitive de la loi commutative, par Cournot : on prend 1 unité à chacun des nombres a, on forme 1 nombre b ; comme l'opération se répète a fois, on obtient a nombres b. Ce raisonnement repose sur une intuition de ordre (non d'espace). En tout cas, les lois de la mult^on se déduisent des 2 formules fon[dam.]

Définition de la puissance. La puissance n^e du nombre a est le produit de n nombres égaux à a. On retrouve ainsi les 2 formules caractéristiques de l'élévation aux puissances.

Ainsi toutes les définitions formelles et nominales deviennent des axiomes déduits des définitions réelles. Ce ne sont plus des conventions arbitraires, mais des règles fondées sur la nature des idées.

Au fond, il n'y a qu'une opération primitive et originale, l'addition : les autres ~~sont~~ ~~bo~~ se ramènent à des cas spéciaux et compliqués de addition. Un produit n'est pas une combinaison de deux facteurs, mais une somme de nombres égaux. Le multiplicateur et l'exposant jouent le rôle d'indices d'opération : ils indiquent combien de fois il faut la répéter (sens cardinal). Les produits et puissances ne sont que des notations abrégées d'additions. Pourquoi les considère-t-on comme des combinaisons nouvelles ? C'est parce qu'on les considère comme fonctions des mult^eurs et exposants. Pour le mult^eur, cela va de soi, en vertu de la loi commutative : le produit est une fonction symétrique des 2 facteurs. Pour l'exposant, cela est venu plus tard (Descartes) : quand on a conçu [d'abord (simplement abréviatif)] l'exposant comme variable : la fonction puissance est devenue la fonction exponentielle. ~~Exemple de l~~ Mais ce sont là des considérations de Analyse.

Opérations inverses. Il n'y a qu'une opération inverse primitive, la partition, inverse de l'addition : on peut décomposer un nombre en plusieurs dont il est la somme. Opération indéterminée. Cas particulier : On assigne l'une des parties, on demande l'autre. C'est la soustraction, op. inverse de l'addition ordonnée (car elle implique un ordre de sommation.) Elle est univoque, comme l'addition : $b+x=a$ (si $b+y=a$, $y=x+n$, $b+(x+n)=(b+x)+n = a+n$.) Mais non commutative : si $x=a-b$ existe, $(b-a)$ n'existe pas : la différence de 2 n est l'excès du pl. gr sur le pl petit. — Si l'on répète la soustraction, 2 cas se présentent : ou bien l'on épuise exactement le pl. gr. nombre, alors il est la somme de n nombres b c.à.d. bn ; n indique combien de fois a contient b ; c'est le quotient. Ou bien il reste une différence [exactement] moindre que b :

Alors : $a = bq + r$ q quotient approché, indique combien de fois au plus a contient b. C'est la division.

Remarque : La division n'est l'inverse de la multiplication que dans le 1er cas : c'est pourquoi nous avons préféré la définir comme une soustraction répétée. Le symbole $\frac{a}{b}$ n'a de sens que dans le cas où : $a = bx$, alors : $x = \frac{a}{b}$.

La division est univoque comme la multiplication.

— L'élévation aux puissances n'étant pas commutative, comporte 2 opérations inverses : racine $\sqrt[n]{a}$ et logarithme. Mais ces opérations ne sont possibles que par exception. Aussi ces opérations appartiennent moins à l'Arithm. qu'à l'Analyse

— Solution de la question : Les jugements arithmétiques sont-ils analytiques ou synthétiques ? Ex : $2 + 3 = 5$. (Étant posées les définitions, sont analytiques, car :)

$1+1 = 2$, $2+1 = 3$, $3+1 = 4$, $4+1 = 5$,

$2 + 3 = 2 + (2+1) = (2+2)+1 = [2 + (1+1)] + 1 = ((2+1)+1)+1 = (3+1) + 1 = 4+1 = 5$. (au moyen des axiomes :)

Cela est vrai si l'on définit les nombres par addition de 1 à 1. Mais si les nombres sont indépendants les uns des autres, et ne peuvent se définir par la somme de leurs unités (car il faudrait savoir combien de unités à additionner : Cantor.) les jugements : $1+1=2$, etc. sont des vérités synthétiques, ~~des théorèmes~~ fondées sur des actes synthétiques de l'esprit : par exemple, il faut une synthèse pour apercevoir : $4+1 = 5$ comme pour apercevoir : $2+3 = 5$, ou $3+2 = 5$. Le rapprochement des concepts ne produit rien : il faut les construire dans l'intuition, c.à.d. poser ~~leurs~~ à part les unités constituantes, les dissocier & les unir. C'est une synthèse idéale ou imaginaire, qui n'a besoin que de l'intuition interne, non de l'externe (expérience,

16 bis

Autres considérations sur la question :
Les jugements ~~analyt~~ arithmétiques sont-ils analytiques ou synthétiques ?
Admettons que l'on puisse démontrer analytiquement : $2 + 3 = 5$
en écrivant : $2 + (1 + 1 + 1) = 5$.
Il faut pour cela remarquer que :
$$1 + 1 + 1 = 3.$$
Or cela ne peut se constater que par intuition (cela est encore plus sensible pour des nombres plus grands.) Il n'y a donc que l'intuition qui nous garantisse l'identité du nombre 3 écrit deux fois sous la forme $1 + 1 + 1$
Que l'on ajoute à 2 les 3 unités ensemble ou successivement, toujours faut-il qu'à un moment donné on aperçoive leur trinité. Au fond, la prétendue démonstration logique (analytique) revient à juxtaposer aux unités qui constituent le nombre 2 les unités qui constituent le nombre 3, et à voir le nombre 5 formé par leur réunion
$(1+1) + (1+1+1) = 1+1+1+1+1$.
Encore une fois, c'est l'intuition seule qui me garantit qu'il y a le même nombre d'unités dans les 2 membres. C'est comme si je rapprochais 2 bâtons et 3 bâtons :

II III

IIIII


ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Remarque. Cela confirme ce que nous disons ailleurs ; que le nombre ne peut être défini comme somme de unités. Sans doute, la synthèse des unités dans le nombre est analogue à la synthèse des nombres dans leur somme ; mais elle est antérieure & plus simple. L'addition est une synthèse du 2e degré, une synthèse de synthèses. Ou plutôt, elle suppose la destruction des synthèses antérieures pour rendre possible une synthèse nouvelle. On délie en quelque sorte les unités de 2 et celles de 3, on les confond et on les unit pour en faire les unités du nouveau nombre (5).

12 juin 1899.

4e leçon

Numération : vient du besoin de représenter les nombres (comme toutes les idées) par des signes. Est à l'Arithmétique ce qu'est le langage est à la pensée, la Grammaire à la Logique. Le signe naturel d'une ~~collec~~ nombre est une collection concrète ayant ce nombre. On emploie de préférence des objets semblables (jetons, boules, monnaies) à l'usage de l'unité : car il faut que l'unité de chaque objet soit distincte et permanente. Signes oraux : répétition de un, un, un,.... Signes écrits : série de bâtons, de ronds, de points, etc. En fait, le bâton est l'origine de la numération romaine, et du chiffre 1. Pas pratique. Signes conventionnels : chaque nombre aurait son chiffre et son nom. Impossible : il en faudrait une infinité. Comment représenter la infinité des nombres par un nombre fini de signes ? On pourrait ~~choisir~~ adopter des nombres de plus en plus grands : P, Q, R... comme unités d'ordre supérieur : dire combien de fois le nombre donné contient P, Q, R.... et indiquer le reste. Il est plus commode de choisir pour P Q R... des multiples, de telle sorte que Q contienne q fois P, R r fois Q, etc. supposés

Mais le plus simple est de choisir P Q R... de telle sorte que leur ~~rapport~~ quotient soit le même : q = r = ...(progr. géométrique). Si de plus on fait : r = q = P, toutes les unités d'ordre supér. seront les puissances successives d'un seul nombre P, ce qui est le comble de la simplicité. — Ainsi la numération repose tout entière sur la possibilité de prendre un nombre pour unité d'un nouveau nombre, et de ~~grouper~~ former ainsi des nombres de nombres ou ensembles d'ensembles (produits). Le nombre P est la base du système de numération. Pour construire la suite naturelle des nombres, ou plutôt de leurs signes

(oraux ou écrits) on n'emploie que P nombres : 1, 2, 3, ... P.
Puis on ajoute le unité à P : $P+1, P+2, \dots\dots P+P = 2P, \dots 3P \dots (P-1)P, PP = P^2$. etc.
On continue ainsi indéfiniment : la suite naturelle, primitivement uniforme, est ainsi partagée par étapes successives ayant pour base une nouvelle puissance de P, à laquelle on ajoute tous les nombres antérieurement formés. La forme générale d'un nombre est :

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0$$

Inversement, pour exprimer un nombre donné N, on le divise par la base P : soit q_1 le quotient, a_0 le reste ; on divise q_1 par P ; q_2 .. a_1 ; etc. ~~on obtien~~ jusqu'au quot. $q_n = a_n$ qui $< P$.
On obtient N sous la forme $N = a_0 + a_1 P + \dots + a_{n-1} P^{n-1} + a_n P^n$

$$\left(N = a_0 + P(a_1 + P(a_2 + P(\dots\dots)))\right) \qquad a_0, a_1, \dots, a_n < P.$$

~~L'énonciation~~ On énonce le nombre en indiquant le nombre des unités de chaque ordre qu'il contient. — Pour l'écrire, on pourrait adopter un signe pour marquer les unités de chaque ordre (ou plusieurs colonnes), mais elles sont marquées par l'ordre même des restes ~~quot.~~ part. $a_0 \dots a_n$. On se contente de les écrire dans cet ordre : $a_n \dots a_0$.
Seulement, il peut se faire que certaines divisions se fassent sans reste : alors le terme correspondant manque. Pour indiquer une colonne vide, et tenir sa place de manière que les autres gardent leur valeur, on invente le zéro, qui indique l'absence d'unité. Ce n'est pas un nombre jusqu'ici, c'est un chiffre « négatif » qui représente le néant de nombre. Chiffres significatifs.
Par suite : $P = 10$, $P^2 = 100$, ... $P^n = 1$ avec n zéros.
Ainsi la numération implique l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances, et même la division. Ce qui prouve bien qu'elle n'engendre pas l'idée des nombres, mais la suppose préformée. Elle n'engendre même pas la suite naturelle : elle en est une représentat. symbolique & systématique.

~~Caractère artificiel de la numération : comme elle procède par décomposition du nombre, d'autres représentations symboliques~~

Sur la numération systématique (décimale) sont fondées les règles ~~les pratiques~~ théoriques des opérations pratiques (bien distinctes des opérations ou combinaisons ~~théoriques~~ primitives des nombres, antérieures à tout système de numération) En effet, ces règles reposent sur les propriétés caractéristiques des opérations théoriques.

Ainsi l'addition, en vertu des lois associative et commutative, peut ~~se définir comme~~ s'effectuer suivant la formule :

$$A+B=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2+\dots+(a_n+b_n)X^n$$

avec cette condition que, si $a_k+b_k>X$, on divise par X, on pose le reste, et on retient le quotient pour l'ajouter à $a_{k+1}+b_{k+1}$. De même pour plusieurs nombres.

La soustraction, en vertu de la loi associative, s'effectue comme suit :

$$A-B=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)X+\dots+(a_n-b_n)X^n$$

avec cette condition, que si $a_k<b_k$, on ajoute X à a_k, et on le retranche du terme suivant, c.à.d. qu'on retranche 1 au coefficient : $a_{k+1}-b_{k+1}$.

La multiplication (assoc. distributive) s'effectue ainsi :

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+\dots+a_nb_nX^{2n}$$

avec la même règle de réduction et de report des unités supérieures, toujours pour amener le résultat à la forme normale.

La règle de division repose sur cette ~~théorème~~ remarque mise en évidence par la formule précédente, que le terme le plus élevé du produit est le produit des termes les plus élevés des facteurs. C'est pourquoi on divise les prem. chiffres du dividende par le premier chiffre du diviseur, pour obtenir le 1er chiffre du quotient (quelquefois trop fort.)

$$\begin{cases}(10a+b)(10a'+b') \\ =100aa'+10(ab'+a'b)+bb'\end{cases}$$

Or si l'on remplace a par $a+1$, le 1er terme augmente de $100a'$.

$$10(ab'+a'b)>100a'$$

$$ab'+a'b>10a' \qquad ab'>a'(10-b)$$

possible

L'élévation aux puissances n'a pas d'algorithme spécial sans doute parce que, faute des propriétés commut. et associativ. on ne peut ramener l'opération à des opérations partielles plus
L'extraction des racines a au contraire un algorithme propre grâce au théorème : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ou $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$

qui prouve que le terme le plus élevé du carré est le carré du terme le plus élevé de la racine : $\begin{cases} 20ab > 100(2a+1) \\ 20ab > 200a \end{cases}$ $b > 10$ impossible

[~~Tandis que pour la division :~~
~~$100aa' + 10(ab' + ba') + bb'$,~~ D'où la règle : 729 (27
329 47/7
329
0

D'où aussi l'extraction de racine abrégée, c.à.d. la possibilité de calculer le reste de la ~~[illegible]~~ racine quand on a au moins la moitié des chiffres.

Ainsi les algorithmes pratiques reposent sur des théorèmes d'Arithmétique (et non d'Algèbre)

Dans les opérations partielles, on est amené à poser les règles du calcul de zéro : $a \pm 0 = a$, $a \times 0 = 0$. Diviser par 0 n'a pas de sens. Ces formules définissent les combinaisons de 0 avec les nombres, et en font un nombre caractérisé par ces propriétés.

— Caractère artificiel de la numération : équivaut à toute autre représentation symbolique des nombres, par décomposition. Cent est aussi bien représenté par 20×5, 25×4, $4 \times 5 \times 5$, que par 100 c.à.d. 10×10. Traces de représentation non systématique, dans la nomenclature : Soixante-dix, quatre-vingts, ... duodeviginti
dans l'écriture : toute la numération romaine. IV, VIII

Ainsi les opérations techniques n'ont pas d'autre résultat que de trouver la représentation systématique d'un nombre donné sous une autre forme de représentation symbolique. Avantage de la numération : rend les nombres comparables au point de vue égalité inégalité. Mais dissimule d'autres propriétés (divisibilité) que met en évidence la décomposition en facteurs premiers (par pratique : nombre infini de n. premiers.)

Ce qui distingue les opérations pratiques, c'est l'existence d'un algorithme spécial: autrement la multiplication se réduirait à l'addition comme l'élévation aux puissances se ramène à la multiplication. De même la division s'effectuerait par soustractions répétées; ce qui prouve bien qu'il n'y a que 2 opérations théoriques primitives, l'addition et la partition.

Le choix de la base est arbitraire, ce qui confirme le caractère conventionnel de la numération. Deux intérêts contraires: réduire le nombre des signes au minimum; réduire au minimum le nombre des chiffres d'un nombre donné. Le 1er intérêt est satisfait par le système binaire (chiffres 0 et 1) Leibnitz: Omnibus e nihilo ducendis sufficit unum. Les puissances de 2 sont 10, 100, 1000.....
Un nombre est la somme de certaines puissances de 2 (et de 1.)
Ce système réduit la multiplication à l'addition, ce qui prouve le caractère artificiel et dérivé de cette opération.
Ex: $7 \times 5 = 35$: $111 \times 101 = 100011$.
Inconvénient: beaucoup de chiffres pour de petits nombres.
Système duodécimal a l'avantage contraire; en outre, la base a beaucoup de diviseurs: 2, 3, 4, 6.
Aug. Comte préfère la base 7: maladroit (n premier.)
Système décimal, a prévalu (raisons théologiques et fétichistes.)
pour des raisons anthropologiques (doigts des 2 mains.)

Sans la numération, on devrait recourir à l'intuition pour toute combinaison de nombres (intuition interne pour les petits nombres, externe pour les plus grands) La numération permet de ramener (grâce aux axiomes ~~fondamentaux~~ qui expriment les propriétés des opérations théoriques) les combinaisons de

nombres quelconques aux combinaisons des ~~(X-1) premiers~~ nombres d'un seul chiffre (au nombre de X, y compris zéro.) ~~toute ad~~ Toutes les opérations pratiques reposent sur la connaissance de la somme et du produit de ces nombres (1) (soit (X-1)(X-1) combinaisons.) Ces combinaisons élémentaires, retenues par cœur, ne proviennent d'aucun calcul (2) elles ~~repo~~ sont connues par intuition. Ainsi la numération ramène les opérations à un petit nombre d'intuitions : et ce nombre dépend du choix de la base ce qui prouve qu'il n'y a pas de borne précise à la portée de l'intuition arithmétique.

(1) Table de Pythagore pour la multiplication.

(2) Car il n'est pas évident que 7+8 = 15, c.à.d 10+5. Le nombre quinze est aussi bien représenté par 7+8 que par 10+5, et les 2 représentations sont également artificielles et dérivées. De même : 8 × 5 = 40 = 10 × 4. Cette égalité se vérifie par la proportion : 8 : 4 = 10 : 5.

5e leçon

Nous possédons les bases logiques de l'Arithmétique. Mais est-ce l'Arithmétique, c.à.d. la science des nombres? Non: ce sont des règles pratiques de calcul, une technique. Elles nous font ~~connaître~~ des faits de calcul, savoir la somme, la différence, le produit et le quotient de 2 nombres ~~particuliers~~ [les vérités particulières] particuliers donnés. Mais une science se compose de lois générales. Analogie avec sciences physiques: les faits d'expérience sont remplacés par les faits de calcul, c.à.d. en dernière analyse par les faits de intuition. Seulement l'induction physique ne suffit pas à ~~fournir~~ fonder les lois arithmétiques. (elle peut les faire découvrir) Exemples d'inductions fausses (on démontrera qu'aucune formule algébrique ne contient que des nombres premiers):

La formule x^2+x+17 donne 17 n premiers de suite
——— $2x^2+29$ ——— 29 ———
——— x^2+x+41 ——— 40 ($x=0,1,2\ldots 39$) (Euler)

D'autre part, aucune loi générale ne peut être établie par une vérification complète, attendu qu'elle comprend une infinité de cas (1) C'est pourquoi la démonstration générale est nécessaire. Le plus souvent, elle s'effectue par le principe de l'induction complète: Si une proposition est vraie pour 1, et que, si elle est vraie pour n quelconque, elle est encore vraie pour n+1, elle est vraie pour tous les nombres. On ~~part du fait~~ montre qu'elle est vraie pour 1 (c'est un fait à constater) et on démontre que si elle est vraie pour n, elle l'est pour n+1. Il y a donc toujours un fait à la base, comme point de départ de la progression (ou récurrence). Cette induction rationnelle diffère de l'induction empirique par

(1) La vérification empirique peut montrer la fausseté d'une loi (car il suffit d'un seul cas) mais non établir sa vérité (car il faut tous les cas)

le caractère adéquat et la certitude apodictique de la conclusion.
Ex: Le carré de la somme des n premiers nombres entiers est égal à la somme de leurs cubes (Vrai pour n = 2)

$(1+2+\dots+n)^2 = 1+2^3+\dots+n^3$ (hypothèse)

$[1+2+\dots+n+(n+1)]^2 = (1+\dots+n)^2 + 2(n+1)(1+\dots+n) + (n+1)^2$

Or: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ Donc

$[1+2+\dots+n+(n+1)]^2 = 1+2^3+\dots+n^3 + [n(n+1)^2 + (n+1)^2]$
$+ (n+1)^3$. c. q. f. d.

Les lois de l'Arithmétique sont de deux sortes:
Lois générales, vraies pour tous les nombres indistinctement,
Lois spéciales, vraies pour certaines espèces de nombres.
(Les unes et les autres sont générales, et portent sur une infinité de cas particuliers.)
Les premières sont considérées comme des théorèmes ~~identités~~ de l'Algèbre

Exemples: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
invoqué pour la règle de extraction de la racine carrée $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
[et déduits des lois fondamentales des opérations arithmétiques.]

Mais à tort: ce sont des théorèmes de l'Arithmétique, portant sur des nombres entiers. La notation dite algébrique est nécessaire pour donner à ces vérités la généralité qu'elles comportent, et pour abréger le langage (Ex: le produit de la somme de 2 n. par leur diff. est égal à la différence de leurs carrés) De même que dans les énoncés, elle ~~est~~ dans les démonstrations: en effet, pour que la dém. soit générale il faut que les nombres sur lesquels on raisonne soient indéterminés, et qu'on n'invoque ni leurs propriétés particulières ni des propriétés du système de numération employé. On n'en est sûr qu'en représentant les nombres par des lettres.

Nous verrons plus tard pourquoi ces vérités paraissent des théorèmes de l'Algèbre, ou plutôt de l'Arithmétique générale : c'est que la généralisation du nombre conservant les lois fondamentales des opérations, ces théorèmes sont encore vrais pour les nombres généralisés. ~~Ils sont donc~~ leur extension dépasse le domaine de l'Arithmétique pure ; ils sont plus généraux que les lois spéciales, etc qui y restent au contraire confinées.

Les lois spéciales concernent des espèces strictement de nombres. Comment se distinguent ces espèces ? Quelles sont les propriétés qui appartiennent à certains nombres à l'exclusion des autres ? L'addition et la mult^on étant toujours possibles, tous les nombres s'y comportent de même. La soustraction n'est possible que si le 1er n. est > le 2e ; elle implique donc la propriété de l'inégalité, dont les lois sont très simples :

Si $A > B$, et $B > C$, $A > C$ (1)

Reste la division, qui n'est possible (exactement) que si le dividende est un multiple du diviseur. Dans les autres cas, la division donne naissance à un reste. C'est au point de vue de la division que les nombres diffèrent surtout entre eux ; ce sont leurs caractères de divisibilité qui servent à les classer.

Définition du diviseur (sous multiple ou facteur) (2)

Tout diviseur de deux nombres divise leur somme, leur différence, le reste de leur division.

D'où : algorithme d'Euclide pour trouver le pl gr commun div.

Repose sur ce principe : qu'une suite de nombres décroissants est nécessairement limitée. C'est que la suite naturelle des nombres a un commencement. Principe synthétique, intuitif.

---

(1) Principe qui permet de ~~sélectionner~~ ranger les nombres par ordre de grandeur croissante ; càd que la suite nat. est linéaire et illimitée (elle pourrait être périodique ou circulaire)

(2) Définir nombre premier ; nombres premiers entre eux

Remarquez que le nombre infini est si peu contradictoire, que l'on est obligé d'invoquer un principe synthétique pour prouver qu'on doit s'arrêter. D'ailleurs, la progression infinie est possible, si la régression infinie est impossible. Dans un sens, il n'y a pas de raison pour s'arrêter; dans l'autre, il y en a une.

Corollaires: Tout diviseur commun de 2 n. divise leur pgcd. Quand on mult ou divise 2 n par un 3e, leur pgcd se trouve mult ou divisé par ce 3e.

Théorème fondamental: Tout nombre qui divise un produit de 2 facteurs et est premier avec l'un d'eux divise l'autre.
C divise AB, est premier avec A: donc leur pgcd est 1.
Le pgcd de AB et BC est B. Or C divise AB et BC; donc il divise B.
– Tout nombre non premier admet un facteur premier.
Démonstration fondée sur le principe de régression.
~~Tout nombre premier qui divise un produit de plus. nombres divise au moins l'un d'eux~~
Tout nombre non premier est un produit de facteurs premiers.
Démonstration fondée sur le principe de régression
Corollaire: Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.
La suite des nombres premiers est illimitée.
En effet, soit p le dernier des n. prem. formons le produit de tous les n. prem. $P = 2.3.5 \ldots p$.
Le n. $P+1$ est premier ou non. Si oui, théorème démontré. Si non, il a un facteur premier. Or tous les n prem jusqu'à p divisent P, donc ne divisent pas $P+1$; il y a donc dans tous les cas un n premier pl grand que p.
Démonstration fondée sur le principe de progression: après ch. nombre prem il y en a un autre; aucun n'est le dernier –
Repose à son tour sur le infinité de la suite naturelle des nom[bres]

Le principe de régression peut servir à démontrer des propriétés négatives des nombres, de la manière suivante. On prouvera que si telle propriété appartient à un nombre (qcq, mais plutôt grand), elle appartient à un plus petit. On est ainsi engagé dans une régression infinie, qui est impossible, en vertu de la constitution même de la suite naturelle. On en conclut que la propriété n'appartient à aucun nombre (Legendre)
(Fermat le 1er l'a employé à démontrer que l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne peut être un carré)

Théorème : Il n'y a aucune formule (algébrique) qui ne contienne que des nombres premiers.

Supposons qu'on ait une telle formule : $ax^3 + bx^2 + cx + d = P$ qui, pour $x = k$, donne le nombre premier p. Faisons $x = k + py$:

$$P = (ak^3 + bk^2 + ck + d) + (3ak^2 + 2bk + c)\,py + (3ak + b)\,p^2y^2 + a\,p^3y^3$$

La 1e ligne $= p$; donc P est un multiple de p.

A plus forte raison il n'y a pas de formule qui donne tous les nombres premiers, et rien qu'eux.
Car on peut trouver des formules qui contiennent tous les nombres premiers (à partir de l'un d'eux), par ex : $6n + 1$ pour les n. prem > 3.

Remarquer que le principe de régression ne serait plus vrai dans l'ensemble des nombres négatifs et fractionnaires. Il suppose essentiellement que la suite des nombres entiers est limitée en avant ; c'est pourquoi il ne s'applique que dans la Théorie des nombres.



6e leçon

La théorie des nombres ne se borne pas à étudier la divisibilité des nombres ; elle ~~les~~ considère aussi le reste de leur division, et ~~regarde~~ les classe d'après ce reste.

– Théorème : Quand la différence de 2 nombres est multiple d'un 3e nombre, les 2 nombres divisés par ce 3e donnent des restes égaux.

Réciproque : Si 2 nombres divisés par un 3e donnent le même reste, leur différence est un multiple de ce 3e.

On considère comme équivalents, au p. de vue de la divisibilité par un nombre m, les nombres qui divisés par m donnent le même reste. On dit qu'ils sont congrus par rapport au mod. m (ou encore résidus l'un de l'autre par rapp. au mod.)

Les nombres congrus s'échelonnent à distances égales dans la suite naturelle, soit de m en m. ~~Celui qui~~ Un seul se trouve entre 1 et m : c'est le résidu minimum, c.à.d. le reste de la division des autres par m.

Les congruences sont des équivalences par rapp. à un diviseur, le module. Il n'y a que m nombres distincts par rapp. au module m.

~~Les~~ propriétés des congruences dérivent de celles des multiples d'un même nombre. ~~On ne change pas le reste d'une division en ajoutant ou retranchant un même nombre au dividende et au diviseur~~, en ajoutant ou retranchant au dividende un multiple du diviseur.

– Si ~~plusieurs~~ l'on divise plusieurs nombres par un même module le reste de leur produit est congru au produit de leurs restes. C'est le principe de la preuve par 9 de la multiplication.

6e leçon

Méthode de la théorie des nombres. Elle a pour objet les lois spéciales des nombres, c.à.d. les propriétés de certaines classes de nombres : nombres premiers surtout ; n. carrés, etc. Ces propriétés résultent de la divisibilité des nombres.
En Arithmétique élémentaire, on étudie les caractères de divisibilité des nombres par certains diviseurs : ces caractères dépendent du système de numération, tandis que la divisibilité d'un nombre par un autre en est indépendante. Nous expliquerons plus loin ce paradoxe.
L'Arithmétique supérieure ne se borne pas à distinguer les nombres divisibles ou non par un nombre donné + Elle introduit plus de précision en classant les nombres d'après le reste de leur division (les n. divisibles donnent le reste 0).
Théorème : Quand la différence de 2 nombres est un multiple ~~divisible~~ ~~par~~ d'un 3e n., les 2 prem. divisés par ce 3e donnent le même reste.
Réciproque : Quand 2 nombres divisés par un 3e donnent le même reste, leur différence est divisible par ce 3e.
On rangera dans la même classe tous les nombres qui, divisés par le même module, donnent le même reste, et on les regardera comme équivalents au p. de vue de la divisibilité, ou encore comme congrus suivant ce module (par le mod.).
La distribution des nombres congrus est intuitive dans la suite naturelle : d'abord, les multiples d'un nombre m (congrus à 0. mod. m) se succèdent de m en m ; de même, les nombres congrus à 1, à 2, ... à (m-1). En conséquence, il y a toujours entre 0 et m, un nombre, et un seul, congru à un nombre donné : c'est le reste de sa division par m, ou son résidu.

+ Ce nombre, par lequel on divise plusieurs autres, s'appellera le module.

Les nombres 0, 1, 2, ... (m-1) forment un système complet de restes incongrus par rapport au mod. m

La considération de l'ordre montre encore que, dans m nombres consécutifs de la suite naturelle, il y a toujours un nombre congru à un nombre donné (en partic. à 0, c.à.d. multiple de m)

— Notation. Dans sa Théorie des nombres (an VI), Legendre est souvent conduit à ~~poser comme de~~ écrire des égalités en négligeant les multip. d'un module, c.à.d. à poser 2 nombres comme égaux à un multip. près du module. Il écrit encore que leur différence est divisible par le module:

$$\frac{a-b}{m} = e,$$

e étant un entier indéterminé.

Gauss, dans ses Disquisitiones arithmeticae (1801), a ~~inventé~~ imaginé d'écrire les congruences comme des égalités:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Cette notation est préférable à la notation dite algébrique:

$$a = b + mq \quad \text{ou} \quad a - b = mq$$

parce qu'elle exprime que le nombre q est entier, et débarrasse l'écriture de cette indéterminée. Ainsi les ~~calcul des~~ congruences remplacent les équations indéterminées de l'Algèbre. par ex.

$$ax + by = c$$

devient: $ax \equiv c \pmod{b}$ $by \equiv c \pmod{a}$

Ce qui déterminait la solution de cette équation, c'est la condition que x et y sont entiers. La notation congruence exprime cette condition. Ainsi s'explique que Legendre identifie la Théorie des nombres à l'Algèbre indéterminée.

L'assimilation de la théorie des nombres à l'Algèbre se justifie par l'analogie des congruences avec les équations.

On peut ajouter ou retrancher membre à membre 2 congruences de même module: car si: $a \equiv b$ $c \equiv d \pmod{m}$

$a - b = \text{mult. } m$, $c - d = \text{mult. } m$ $(a-b) \pm (c-d) = \text{mult. } m$

En particulier, on peut ajouter ou retrancher un même nombre aux 2 membres d'une congruence (car 2 n égaux sont congrus suivant un mod quelconque) et ajouter ou retrancher ~~ou~~ à l'un des membres un mult. du module (car un mult. de m est congru à 0 (mod m)).
On retrouve ce théorème de l'Arithmétique :
Le reste d'une division ne change pas quand on ajoute ou retranche au dividende un multiple du diviseur.
On peut multiplier membre à membre 2 congruences de même module : $a \equiv b$ $c \equiv d$ (mod. m)

$a = mq + b$ $c = mq' + d$

$ac = m^2qq' + dmq + bmq' + bd$ $ac \equiv bd$ (mod. m)

On retrouve en particulier ce théorème de l'Arithmétique :
Si l'on divise 2 (ou plusieurs nombres) par le même module, leur produit donne le même reste que le produit de leurs restes.
<u>Application pratique</u> : Preuve par 9 de la multiplication.
<u>Théorème</u> : Tout nombre entier est congru à la somme de ses chiffres suivant le module 9.
En effet, $10 \equiv 1$, $100 \equiv 10 \equiv 1$, $10^n \equiv 1$;

$a.10^n \equiv a$. $N = a.10^n + b.10^{n-1} + \ldots + k.10 + l$,

$N \equiv a + b + \ldots + k + l$.

On ~~fait~~ trouve ainsi les résidus des facteurs, on fait leur produit ; il doit être congru au résidu du produit —
Naturellement, la preuve par 9 est en défaut si l'on s'est trompé d'un multiple de 9.
Comment ce procédé, relatif à la base de numération, peut-il révéler ~~la~~ divisibilité indépendant du système ?
C'est que c'est un critérium (un caractère de) pour reconnaître, en général, la divisibilité par $(X-1)$ d'un nombre écrit dans le système à base X. C'est là une ~~propo~~ loi générale des nombres, dont la preuve par 9 n'est qu'un cas particulier. Pour reconnaître la divisibilité d'un nombre par n, il suffit de l'écrire dans le système à base $(n+1)$.

Enfin, on peut diviser les 2 membres d'une congruence par un même nombre, pourvu qu'il soit premier avec le module : $a \equiv b \pmod{m}$ $\quad \frac{a-b}{m} = e$.

Pour que $\frac{a-b}{mn} = e$, il faut que m, n soient premiers entre eux ; car $(a-b)$ étant divisible sépar^t par m et n, sera divisible par leur produit.

Dans le cas du module premier p, tout nombre non divisible par p est premier avec p : on peut donc diviser les 2 membres d'une congruence par tout nombre non nul (mod. p.)

(Analogie avec les équations) + Théorème de Fermat +

Cette analogie réelle, on a cherché à la rendre complète. Comme en Algèbre, il y a ~~de~~ parmi les congruences des identités, des égalités et des équations.

L'équation-congruence du 1er degré à mod premier $ax \equiv b \pmod{p}$ est identique si $a \equiv b \equiv 0$; impossible si $a \equiv 0$.

Si $a \not\equiv 0$ elle a une racine (et une seule) entre 0 et m : $x \equiv \frac{b}{a}$ ou : $x \equiv \frac{b}{a} \pmod{p}$

On ne considère pas comme distinctes les racines congrues suivant le module ; par suite, on ne tient compte que des racines comprises entre 0 et m.

Une congruence de module premier (non identique) ne peut avoir un nombre de racines supérieur à son degré.

La congruence : $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ a p racines distinctes : elle est vérifiée par tous les n entiers.

Ainsi la congruence, simple notation arithmétique, devient l'objet d'une théorie propre et indépendante, qu'on a rendue aussi analogue que possible à la théorie des éq. algébriques. Il est curieux que la th. des congruences soit moins simple et moins facile que celle des équations, et que l'Arithmétique ait recours à l'Algèbre, et s'efforce pour ainsi dire de la copier. C'est que la généralisation du nombre généralise et simplifie les propriétés des nombres.

+ Dans le cas d'un module premier, un produit ne peut être $\equiv 0$ que si l'un de ses facteurs $\equiv 0$.

Deux ou plusieurs nombres étant divisés par le même module le reste) leur produit est congru (au produit de leurs restes.

Caractère de divisibilité d'un nombre par 9.

$10 \equiv 1 \quad 100 \equiv 10 \equiv 1 \quad 10^n \equiv 1 \quad (\text{mod. } 9.)$

D'où : tout nombre est congru à la somme de ses chiffres.

Remarque : ~~Cette propriété~~ critérium dépend du syst. de numération, et pourtant la divisibilité d'un nombre par 9 en est indépendante. C'est que ce critérium est général pour critère la divisibilité par $(X-1)$ dans le système à base X. Ainsi pour reconnaître la divisibilité d'un nombre quelconque par n, il suffirait de l'écrire dans le système à base $(n+1)$.

Rôle de l'idée de ordre dans la théorie des nombres :
De ce que les multiples de m se suivent de m en m dans la suite naturelle, on conclut qu'il ~~dans~~ s'en trouve un parmi m nombres consécutifs.

Théorème : Si a est premier avec m, les nombres :

$a, 2a, 3a, \ldots\ldots (m-1)a$

sont congrus, suivant le mod m, ~~avec~~ aux nombres respectivement

$1, 2, 3, \ldots\ldots m-1$

pris dans un autre ordre — En effet, 1° tous ont un reste non nul : car m étant premier avec a n'en divise aucun. 2° tous les restes sont différents : car si $pa \equiv qa$, $pa - qa = (p-q)a$ serait divisible par m, ce qui est impossible, $p - q < m$. ~~Donc~~ les restes sont ~~tous~~ $>0, < m$: donc ce sont les $(m-1)$ (nombres entiers (premiers.)

Théorème de Fermat (On a en vertu du lemme précédent : (p n. premier qui ne divise pas a.) donc a premier avec m.

$a . 2a . 3a \ldots . (p-1) a \equiv 1 . 2 . 3 \ldots . (p-1)$.

ou : $1 . 2 . 3 \ldots (p-1) [a^{p-1} - 1] \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$

~~Si lors a n'est pas divisible par le n premier p, on a~~

ou, en divisant par $1.2.3\ldots(p-1)$ qui est premier avec p.

$$a^{p-1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ou encore[1] $x^p - x \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$

~~Lemme~~ Théorème (cité par Waring) de Wilson (dém. par Lagrange et Euler) : Si p est premier,

$$1.2.3\ldots(p-1)+1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

Dans la suite : $a, 2a, \ldots (p-1)a$ ($a < p$, donc premier à p.)

Il y a un nombre et un seul qui a 1 pour résidu : soit αa ; $1 \leq \alpha \leq p-1$. α associé de a.

Pour que α soit égal à a, il faut que $a^2-1 \equiv 0$, c.à.d. que $(a-1)$ ou $(a+1) \equiv 0$. $a=1$, $a=p-1$.

Donc tous les nombres $2, 3 \ldots (p-2)$ sont associés deux à deux, leur produit est $\equiv +1$.

$$1.2.3\ldots(p-2)(p-1) \equiv p-1$$

$$1.2.3\ldots(p-2)(p-1)+1 \equiv p \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

Cela n'est vrai que pour les nombres premiers, car si p n'est pas premier, ~~il a~~ il est le produit de 2 nombres de l'ensemble $1.2.3\ldots(p-1)$; ~~et~~ par conséquent il divise leur produit, et ne peut diviser $(p-1)!+1$.

Ce théorème énonce une propriété caractéristique des n. prem.

Remarque : La considération de l'ordre des nombres dans la suite naturelle rend intuitives certaines de leurs propriétés. La théorie des congruences a pour effet de transformer l'ordre linéaire illimité en un ordre circulaire ou périodique ; et de réduire l'ensemble des nombres aux m premiers. D'où ses applications à la théorie des substitutions.

[1] On en conclut que l'équation-congruence : $x^{p-1}-1 \equiv 0$ (mod. p) a ~~les $(p-1)$~~ pour racines les $(p-1)$ premiers nombres entiers. Si l'on la multiplie par la congruence ~~évidente~~ $x \equiv 0$ (mod. p) qui a pour racines $0, p, 2p\ldots$ on a la congruence : $x^p - x \equiv 0$ (mod. p) qui a pour racines tous les nombres entiers.

7e leçon

La théorie des nombres a pour objet les lois et propriétés spéciales des nombres entiers. Pour donner une idée de ces lois, on va passer en revue les principaux théorèmes et problèmes de cette science, pour montrer la disproportion qu'il y a entre sa méthode et son objet, entre la simplicité des résultats et la difficulté ou la complication des moyens employés pour les obtenir.

Une fonction qui joue un grand rôle dans la théorie des nombres, est le nombre des nombres premiers à un nombre donné et non supérieurs à lui: $\varphi(1) = 1$.

Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$.

Si $n = p^\alpha$, $\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Si $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$

Si $n = abc\ldots$ (premiers entre eux) $\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c)\ldots$

Théorème: Si $d, d', d''\ldots$ sont tous les diviseurs de n (y compris 1 et n) $n = \Sigma\,\varphi(d)$.

Exemple: 24 a pour diviseurs: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24.

$$24 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(8) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(12) + \varphi(24)$$
$$= 1 + 1 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 8.$$

Propriétés des nombres impairs. Leurs différentes formes:

$2n \pm 1$; $4n+1$, $4n+3$; $6n+1$, $6n+3$, $6n+5$; etc.

Propriétés des nombres premiers.

~~Tout~~ nombre premier ~~impair~~ (>3) est de la forme $6n \pm 1$.

Un nombre impair somme de 2 carrés est de la forme $4n+1$.

En effet, il doit être la somme d'un carré pair et d'un carré impair. Or un carré pair est $4n$; un carré impair est $4n^2 + 4n + 1$.

Réciproque (imparfaite; beaucoup plus difficile à démontrer):
Tout nombre premier de la forme $(4n+1)$ est la somme de 2 carrés (c.à.d. est de la forme: x^2+y^2.)
Tout nombre premier de la forme $(4n+3)$ est la somme de 3 carrés au moins.
On a ainsi une propriété caractéristique des nombres premiers de la forme: $4n+1$.
Tout nombre premier $(8n+1)$ est à la fois des 3 formes:

$$x^2+y^2, \quad x^2+2y^2, \quad x^2-2y^2.$$

Tout nombre premier $(8n+3)$ est de la forme:

$$x^2+2y^2$$

Tout nombre premier $(8n+7)$ est de la forme:

$$x^2-2y^2$$

Résumé:

Forme	x^2+y^2:	$8n+1$,	$8n+5$.
"	x^2+2y^2:	$8n+1$,	$8n+3$.
"	x^2-2y^2:	$8n+1$,	$8n+7$.

Lemmes (théorèmes de l'Algèbre, c.à.d. ~~[illegible]~~ de l'Arithmétique générale):
~~Tout~~ Le produit de 2 sommes de 2 carrés ou de 4 carrés est une somme de 2 carrés ou de 4 carrés.
En vertu des identités de Lagrange:

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) = (a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = (a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2 + (a\beta-b\alpha+c\delta-d\gamma)^2+(a\gamma-c\alpha+d\beta-b\delta)^2+(a\delta-d\alpha+b\gamma-c\beta)^2.$$

Réciproque (beaucoup plus difficile, de l'Arithmétique pure):
Si un nombre divise une somme de 2 ou 4 carrés sans les diviser tous, il est lui-même une somme de 2 ou 4 carrés.
Démonstration par le principe de régression: on construit une suite d'entiers décroissants qui ne peuvent être nuls: donc l'un d'eux est nécessairement 1.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une proposition énoncé par Fermat.

<u>Nombres polygonaux</u> On considère les ~~suites~~ séries à termes généraux: n, $2n+1$, $3n-2$, $4n-3$, ... $kn-k+1$. dont les sommes progressives sont respectivement:

$\frac{n(n+1)}{2}$, n^2, $\frac{n(3n-1)}{2}$, $n(2n-1)$.... $k\frac{n(n-1)}{2}+n$

Remarque: On a démontré en passant que la série des n impairs engendre la suite des nombres ~~[illegible]~~ carrés, ou ce théorème: La somme des n premiers n impairs est $= n^2$.

Ces suites sont celles des nombres triangulaires:

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

carrés: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

pentag: 1, 5, 12, 22, 35, 51, ...

hexag: 1, 6, 15, 28, 45, 66, ... etc.

Théorème de Fermat: Tout nombre entier est la somme de 3 nombres triangulaires, de 4 carrés, de 5 pentagonaux, etc. (n'est démontré que pour les triangulaires et carrés)

Legendre a traité le problème de la décomposition des nombres en 3 carrés —

<u>Théorèmes sur les puissances des nombres</u> (principe de régression employé par Fermat et Euler):

La somme de 2 cubes ne peut être un cube

La somme de 2 bicarrés ne peut être un carré (ni un bicarré)

<u>Théorème général</u>, énoncé par Fermat (non démontré):

L'équation: $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour $n > 2$.

Problème général de la représentation des nombres par les formes.

Exemple: forme quadratique: $ax^2 + bxy + cy^2$

a, b, c nombres donnés; x, y, nombres indéterminés.

Toute forme définit une <u>classe</u> de nombres qui y sont <u>contenus</u>

Recherche de la forme qui convient aux diviseurs de la forme $t^2 - Du^2$, D donné, t, u indét. (premiers entre eux)

Si l'on détermine séparément les formes linéaires et les formes quadratiques qui conviennent à ces diviseurs, tout nombre premier contenu dans une de ces formes linéaires sera aussi contenu dans une des formes quadratiques. D'où une foule de théorèmes sur les propriétés des nombres premiers, et sur la divisibilité des formes les unes par les autres (Méthode due à Lagrange)

La condition nécessaire et suffisante pour que le n premier p divise la forme $(t^2 - Du^2)$ est que D soit résidu quadratique de P, c.à.d. que l'équation: $x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$ soit possible.

C'est l'origine de la théorie des résidus quadratiques.

La question revient à la résolution de la congruence binôme du 2e degré: $x^2 \equiv D \pmod{p}$

Toutes les congruences du 2e degré et de mod premier se ramènent à des congruences de cette forme.

Si l'on ~~prend~~ ~~forme~~ les ~~carrés~~ carrés des $(p-1)$ premiers nombres, ~~et qu'on~~ prenne leurs résidus par rapp. à p, les résidus symétriques sont égaux: car: $(p-a)^2 = p^2 - 2ap + a^2 \equiv a^2 \pmod{p}$ ~~$a(p-a) \equiv -a^2$~~

Sur les $(p-1)$ prem. nombres, il y a donc $\frac{p-1}{2}$ résidus quadr. et $\frac{p-1}{2}$ non-résidus. Exemple

$$\begin{cases} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6. \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36. \\ 1, & 4, & 2, & 2, & 4, & 1. \pmod{7} \end{cases}$$

1, 2, 4 résidus; 3, 5, 6 non résidus

~~On~~ Les résidus quadratiques de p sont donc ceux des $\frac{p-1}{2}$ prem. nombres. Ils sont tous différents, car on démontre que 2 de ces nombres ne peuvent avoir le même résidu: car pour qu'on ait: $a^2 \equiv b^2$ ou $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ il faudrait qu'on eût: $(a-b) \equiv 0$ ou $(a+b) \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui est impossible, a et b étant par hypo. inférieurs à $\frac{p-1}{2}$

Appelons nombres associés les couples de nombres qui vérifient la congruence bilinéaire : $yz \equiv D \pmod{p}$
2 nombres associés ne peuvent être égaux que si D est résidu quadratique de p : dans ce cas, la congruence

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

admet 2 solutions, x_0 et $p-x_0$, dont le produit :

$$x_0(p-x_0) \equiv -x_0^2 \equiv -D \pmod{p}$$

Si D est non-résidu, les $(p-1)$ prem. nombres forment $\frac{p-1}{2}$ couples congrus à D : donc

$$1.2.3.\ldots(p-1) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Si D est résidu de p, un seul de ces couples est congru à $-D$, les autres à $+D$; donc

$$1.2.3.\ldots(p-1) \equiv -D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Or en vertu du théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1$,
donc $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ si D est résidu,
$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ si D est non résidu

Toute solution de la congruence : $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0$
est un résidu, et de la congruence : $x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0$
est non résidu.

Symbole de Legendre : $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$

$\frac{D}{p} = +1$ si D est résidu, $\frac{D}{p} = -1$ si D est non résidu

Problème inverse : trouver les nombres premiers dont D est résidu quadratique. Se résout au moyen de la

Loi de réciprocité de Legendre $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

C.à.d. : si l'un des nombres p, q est de la forme : $(4n+1)$, p et q sont résidus ou non résidus l'un de l'autre à la fois.
Si p et q sont de la forme $(4n+3)$, l'un deux est résidu de l'autre, et l'autre non résidu du premier.

Peut-on représenter tous les nombres premiers par une forme ? Non.
Il n'y a aucune formule qui ne contienne que des nombres premiers.
Supposons qu'on ait une telle formule : $ax^3 + bx^2 + cx + d = P$,
qui pour $x = k$ donne le premier p : Faisons $x = k + py$

$$P = ak^3 + 3ak^2py + 3akp^2y^2 + ap^3y^3$$
$$+ bk^2 + 2bkpy + bp^2y^2$$
$$+ ck + cpy$$
$$+ d$$
$$= p + \text{mult } py + \text{mult } p^2y^2 + ap^3y^3 = \text{mult } p.$$

A plus forte raison il n'y a pas de formule qui donne tous les nombres premiers, et eux seuls, c.à.d qui les caractérise.
Leur propriété caractéristique résulte du théorème de Wilson.
— De là vient la difficulté de découvrir des propriétés générales des nombres premiers. Exemple :
Problème du nombre des nombres premiers compris entre deux bornes données (en particulier, inférieurs à un n. donné)
N'est pas résolu : M. Tchebicheff a seulement trouvé des limites entre lesquelles se trouve compris le nombre demandé.
Or cette recherche met en jeu toutes les ressources de l'Algèbre et de l'Analyse : formule de Stirling (c.à.d. d'une série divergente) ; des logarithmes & autres fonctions transcendantes le nombre π) ; des intégrales, etc. (pour $\log(1.2.3\ldots n.)$ exprimé par le produit infini : $2\left(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}\ldots\right.$ formule de Wallis)
Contraste entre la simplicité du problème et la difficulté de la solution, la complication énorme des moyens employés pour la démonstration, et l'obscurité ou l'incertitude des résultats
Cela tient à la discontinuité des propriétés des nombres : aussi on fait appel à l'Algèbre, c.à.d. au nombre généralisé, affranchi des exceptions qui embarrassent l'Arith. intégrale et constituent en même temps les propriétés spéciales des nombres ; et à l'Analyse,

c.à.d. au continu. Il semble donc qu'il faille plonger les nombres dans le continu pour les mieux connaître, comme si le continu était plus intelligible et plus maniable que le nombre.

D'autre part, le caractère mystérieux de ces propriétés des nombres ~~réfractaires~~ donne l'illusion de l'objectivité : qques-unes forment des îlots inabordables ou des forts inexpugnables : exemples : certains théorèmes de Fermat. ~~Cela ne serait pas possible si les nombres étaient de simples~~ D'où le mysticisme de certains arithméticiens, considérant les nombres comme réels en dehors de l'esprit, et lui résistant. (Pythagorisme.) Ce qu'il y a de vrai dans cette tendance, c'est que les nombres ne seraient pas obscurs et réfractaires s'ils n'étaient que de ~~purs~~ simples concepts, de pures constructions de l'esprit. Ils ne contiendraient rien de plus que ce que l'esprit y mettrait en les formant, il n'y aurait qu'à les analyser pour voir toutes leurs propriétés. + ~~Ils~~ Ils sont donc le produit d'une synthèse, ~~et d'une synthèse intuitive~~ qui, en les construisant, détermine une infinité de propriétés implicites, autres que celle qui suffit à les définir : de même qu'en construisant un triangle on détermine nécessairement 3 angles dont la somme est égale à 2 droits. Et cette synthèse n'est pas logique, car l'analyse logique suffirait à la résoudre. or si l'on peut décomposer un nombre en une somme ou en un produit de facteurs, il est plus difficile de le décomposer en une somme de carrés, par ex. Le contenu de la synthèse n'est pas logique, mais intuitif : c'est la grandeur. (théorème de D'Holbach

+ Exemple d'une propriété problématique : Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers. Vérifié jusqu'à 1000 ; on n'en a prouvé ni la vérité, ni la fausseté.

Remarque historique : La Théorie des nombres s'est développée bien plus lentement et plus tard que l'Algèbre et l'Analyse, justement parce qu'elle a besoin de leur concours. La Th. des congruences a été imitée de la Th. des équations. Ainsi la Th. des nombres n'est pas une science autonome et qui se suffise à elle-même, ce qui est d'autant plus étonnant que l'idée de nombre paraît absolument indépendante des idées d'ordre et de grandeur, et plus simple qu'elles.

8e leçon

Les lois générales de l'Arithmétique sont celles qui résultent des propriétés ~~fondamentales~~ combinatoires des opérations; elles sont indépendantes de la nature ou valeur particulière des nombres combinés. Aussi est-il bon, pour les formuler et les démontrer, d'employer des lettres, ce qui ~~montre bien~~ met en évidence la généralité des propositions.

Exemple: Le carré de tout nombre entier est supérieur d'une unité au produit des 2 nombres voisins dans la suite naturelle: $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

En général, on obtient toutes les propositions de ce genre en appliquant aux expressions littérales les règles du calcul des nombres entiers: lois commutative, associative de l'addition et de la multiplication; loi distributive de la multiplication par rapport à l'addition. C'est ce qu'on appelle improprement le calcul algébrique.

Toutes les expressions ainsi obtenues en transformant l'une d'elles suivant les lois des opérations arithmétiques sont équivalentes, c.à d. ont la même valeur numérique, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres; leur équivalence constitue les identités algébriques:

Ex:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Identités de Lagrange, etc.

Les additions et multiplications indiquées sont toujours possibles; mais non les soustractions et divisions. Le calcul algébrique comporte donc des restrictions & exceptions.

On ne peut écrire $(a-b)$ que si $a > b$; $\frac{a}{b}$ que si a est divisible par b. Or on n'en sait rien à l'avance; on écrit donc conditionnellement $a-b$, $a:b$, en supposant que ces expressions ont un sens numérique.
Il y a intérêt, pour assurer au calcul toute sa généralité, à supprimer ces restrictions en rendant toujours possibles les opérations inverses comme les opérations directes.
Pour cela, il suffit de donner un sens aux expressions $(a-b)$, $(a:b)$ dans le cas où elles n'en ont pas c.à.d. de ~~[illegible]~~ créer des nombres correspondant à ces symboles et que l'on considérera comme les résultats de ces opérations.
Ainsi l'extension des opérations entraîne une extension corrélative de l'ensemble des nombres. Et inversement, la généralisation du nombre implique une généralisation des opérations arithmétiques, car elles n'ont été définies que pour les nombres entiers naturels. Il n'y a aucune contradiction à cela, pourvu qu'on spécifie bien que les nouvelles opérations ne sont pas identiques aux anciennes.
Mais alors, en quoi consistera la généralisation? Comment les nouvelles opérations peuvent-elles être considérées comme l'extension des anciennes? C'est grâce à l'analogie de leurs propriétés combinatoires. La généralisation du nombre doit donc être régie par le principe de la permanence des règles de calcul (Hankel).
On pourrait adopter une méthode radicale, et créer de toutes pièces, au moyen des nombres entiers, de nouveaux nombres pour lesquels on définirait à nouveau les opérations fondamentales; puis on remarquerait l'analogie d'une partie du nouvel ensemble avec la totalité de

l'ensemble primitif, et on les identifierait après coup. On aurait ainsi une suite d'ensembles superposés, tous distincts comme les opérations qui les caractérisent et qui rentreraient les uns dans les autres. On préfère suivre une marche moins arbitraire, moins logique peut-être, mais qui montre comment on est amené à étendre progressivement l'ensemble primitif.

Rappelons les propriétés fondamentales des opérations directes (qui doivent se conserver dans la généralisation):

I. L'addition est:

1° uniforme (si $a=a'$; $b=b'$; on a: $a+b=a'+b'$.)

2° commutative: $a+b=b+a$

3° associative: $(a+b)+c=a+(b+c)$

4° a un module (zéro): $a+0=a$

II La multiplication est:

1° uniforme (si $a=a'$, $b=b'$, $ab=a'b'$.)

2° commutative: $ab=ba$

3° associative: $(ab)c=a(bc)$

4° distributive par rapport à l'addition:
$(a+b)c=ac+bc$.

5° a pour module 1. $a.1=a$

$a\times 0=0$. (résulte de 4°.)

Comme toutes les propriétés des combinaisons de nombres se déduisent logiquement des précédentes, ~~les~~ elles subsisteront tant que l'on conservera celles-ci. Les règles du calcul algébrique s'appliqueront donc aux nouveaux nombres: leur addition devra posséder les 4 propriétés, leur multiplication, les 5 propriétés énoncées. Et ces propriétés suffisent à définir ces combinaisons, puisqu'elles seules entrent

en considération. On appellera donc *addition* toute combinaison qui possède les 4 propriétés, *multiplication* toute combinaison qui possède les 6 propriétés.

La soustraction possède les propriétés suivantes (quand elle est possible):

1° $x = a - b$ quand $x + b = a$ ~~$a = b + x$~~ $(a > b)$

~~2°~~ d'où: $(a-b) + b = a$ — L'opération directe étant complètement uniforme l'opération inverse l'est.

2° $(a-b) + c = (a+c) - b$.

3° $(a-b) - c =$ ~~$a+c$~~ $a - (b+c)$

4° $a - (b-c) = (a+c) - b$

5° $(a-b) + (a'-b') = (a+a') - (b+b')$ Cas particulier

6° $(a-b) - (a'-b') = (a+b') - (a'+b)$ Egalité

Le résultat d'une suite d'additions & de soustractions ne dépend pas de leur ordre, *pourvu que* les opérations successives soient possibles.

Pour lever cette restriction, on va considérer comme de nouveaux nombres les *différences imaginaires* $(a-b)$ où $a < b$, ~~càd et~~ les soumettre aux mêmes règles de calcul que les différences réelles; càd qu'on ne les distinguera pas, et qu'on ne fera plus d'exception.

Tout nombre entier peut être représenté par une différence *réelle*: $(a-b)$. On démontre: $(a-b) + b = a$.

Définition de l'égalité et de l'inégalité: On posera:

$$a - b \gtreqless a' - b'$$

suivant qu'on a: $a + b' \gtreqless a' + b$

Cette dernière relation a toujours un sens *réel*. Quand les diff. sont réelles, c'est un théorème; qd elles sont imag. une définition.

Il en résulte que si: $a - b = a' - b'$, on a: $a + b' = a' + b$, et *réciproquement*.

Définition de l'addition :

$$(a-b)+(a'-b')=(a+a')-(b+b')$$

Soustraction :

$$(a-b)-(a'-b')=(a+b')-(b+a')$$

Ces deux opérations sont commutatives et associatives ; de plus, elles sont uniformes et toujours possibles.

Remarque : $(a-b)-(a'-b')=(a-b)+(b'-a')$

Ainsi la soustraction se ramène à une addition (puisque $b'-a'$ existe toujours) On ajoute la symétrique.

Multiplication (Sans distinguer entre les différences) on a :

1° $(a-b)\,c = ac-bc = c(a-b)$ car si : $a-b=d$, $a=b+d$; $ac=bc+dc$; $dc=ac-bc$

2° $(a-b)(a'-b') = a(a'-b')-b(a'-b')$

$$= (aa'-ab')-(ba'-bb')$$

$$= (aa'+bb')-(ab'+ba').$$

Ce résultat est une différence (réelle ou imaginaire) Donc la multiplication est toujours possible, et uniforme. Elle conserve d'ailleurs toutes ses propriétés.

~~Simplification : $a-b=(a+m)-(b+m)$~~

Simplification ; $(a-b)=(a+m)-(b+m)$

~~$(a-b)+(m-m)=(a-b)+0=a-b$~~

On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux 2 termes d'une différence

~~Ainsi~~ 0 reste le module de l'addition : ~~D'ailleurs~~ car, si :

$a+b'=b+a'$; $(a-b)-(a'-b')=(a+b')-(b+a')=0$.

Supposons maintenant : $a=b$, $a'>b'$ ($a'-b'$ réel) :

$$0+(a'-b')=(a+a')-(b+b')=a'-b'.$$

$$0-(a'-b')=(a+b')-(b+a')=b'-a'.$$

Or $(a'-b')$ est un nombre réel ; $\underline{n}$: donc une différence réelle est de la forme $0+\underline{n}$, une diff. imag. de la forme : $0-\underline{n}$

Il suffit donc d'introduire les nouveaux nombres $0 - n$ à côté des anciens : $0 + n = n$. On les appellera symétriques.

On remarquera que $(a - b)$ et $(b - a)$ sont symétriques.

On écrira simplement : $+n$ $-n$.
$$\begin{cases} (+a)+(+b) = +(a+b) \\ (+a)+(-b) = +(a-b) \\ (-a)+(-b) = -(a+b) \end{cases}$$

Addition : On fait la somme suivant la règle complexe ~~On écrit tous les nombres à la suite (avec leur signe)~~

Soustraction : On ~~[illegible]~~ ajoute le nombre changé de signe.

Multiplication : ~~$(n-0)(b-0)$~~ ~~$-a$ signifie [illegible] le symétrique de [illegible]~~
$$(a-0)(a'-0) = +aa'$$
$$(a-0)(0-b') = -ab'$$
$$(0-b)(0-b') = +bb'.$$

D'où règle des signes (la même pour la division)

Généralisation de la division : Quand elle est possible elle possède les propriétés suivantes :

1° $x = a:b$ quand : $bx = a = xb$.

d'où : $(a:b)\times b = a$.

L'opération directe étant complètement uniforme l'opération inverse est uniforme.

2° $(a:b)\times c = (a\times c):b$.
3° $(a:b):c = a:(b\times c)$.
4° $a:(b:c) = (a\times c):b$.
5° $(a:b)\times(a':b') = (a\times a'):(b\times b')$
6° $(a:b):(a':b') = (a\times b'):(b\times a')$ Cas particulier $=1$ (Égalité

Le résultat d'une suite de multiplications et divisions ne dépend pas de leur ordre, pourvu que les divisions à effectuer soient toutes possibles.

En retranchant le plus petit terme du plus grand, on les met sous la forme $(n-0)$ et $(0-n)$. ($n = a-b$ si $a>b$; $= b-a$ si $b>a$)

Donc si on a : $= (n+0) = 0+n$

$a:b = a':b'$, on a aussi : $ab' = ba'$, et réciproquement.

Pour lever cette restriction, on va considérer comme de nouveaux nombres les quotients imaginaires $(a:b)$ quand a n'est pas divisible par b; on les soumettra aux mêmes règles de calcul que les quotients réels, c.à.d. qu'on ne fera plus de distinction entre eux. D'ailleurs, tout nombre ~~réel~~ peut être conçu comme quotient réel. On convient donc par un mot qui dans tous les cas:

$$(a:b)\times b = a.$$

Définition de l'égalité et de l'inégalité. On pose:

$$a:b \gtreqless a':b'$$

suivant que: $a\times b' \gtreqless a'\times b$

cette dernière relation ayant toujours un sens réel.

(Ex: $3\times 8 = 4\times 6$: $8:4 = 6:3$, $8:6 = 4:3$.)

Définition de la ~~addit~~ multiplication:

$$(a:b)\times c = (a\times c):b$$

$$(a:b)(a':b') = aa':bb'.$$

Division:

$$(a:b):c = a:(b\times c)$$

$$a:(b:c) = (a\times c):b = a\times(c:b).$$

$$(a:b):(a':b') = (a\times b'):(b\times a') = (a:b)\times(b':a').$$

La multiplication et la division sont toujours possibles et uniformes.

Simplification: $a:b = am:bm$

On peut multiplier ou diviser les 2 termes d'une fraction par un même nombre. Réduction à la plus simple expression. Si a est divisible par b: $a = bn$, $a:b = n:1$.

Assimilation des fractions de dénom 1 aux entiers qui forment leur numérateur. $(n, n) = (1,1) = 1$.

Module: car: $(a:b)\times(n:n) = (an:bn) = (a:b)$

Remarque: $a : b = (a : 1)(1 ; b) = a(1 ; b)$
Il suffit donc d'introduire les fractions ayant pour numérateur 1 et pour dénomin. un nombre entier (c.à.d. les inverses de tous les nombres entiers) (1)
La division est ramenée à la multiplication: Diviser par un nombre c'est multiplier par le nombre inverse.
N. B.: En général, $a : b$ est l'inverse de $b : a$
Définition de l'addition: $(a : b) + (a' : b')$.
~~Puis~~ On a toujours: $\begin{cases} a : b = ab' : bb'. \\ a' : b' = ba' : bb'. \end{cases}$
Or: $a : b = ab'(1 : bb')$ $a' : b' = ba'(1 : bb')$
Donc $(a : b) + (a' : b') = (ab' + ba')(1 : bb') = (ab' + ba'$
en vertu de la loi ~~au~~ distributive de la multiplication
On démontre d'ailleurs que si l'on remplace les fractions $(a : b)$, $(c : d)$ par des fractions égales: $(a' : b')$, $(c' : d')$, ~~leur~~ somme est égale à la somme des premières:
a de ab-c... $ad : bc = a'd' : b'c'$.
Soustraction: Inutile de la définir, puisqu'elle est ramenée à l'addition: $(a : b) - (c : d) = (ad - bc, bd)$
En effet: $(a : b) - (c : d) = (a : b) + (-c : d)$.
L'ensemble des nombres fractionnaires qualifiés, ou rationnels est donc tel que les 4 opérations y sont possibles et uniformes sans exception. Les opérations inverses sont ramenées aux opérations directes. Par l'extension qu'elles ont reçue

(1) A la rigueur, on peut se contenter d'introduire les inverses des nombres premiers.
Module: toute fraction de numérateur 0; donc: $0 : d =$

9e leçon

Résumons la généralisation du nombre entier :

En généralisant la soustraction des nombres entiers, on a construit l'ensemble des nombres entiers qualifiés (càd. positifs, négatifs et nul) : ... $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$ et l'on a défini pour ces nouveaux nombres les 4 opérations arithmétiques, en conservant leurs propriétés combinatoires. Seulement, la soustraction est toujours possible (1)

Comme les nombres positifs ont les mêmes propriétés que l'ensemble des nombres arithmétiques, on les identifie : ~~pas de confusion possible entre~~ on peut aussi assimiler les opérations homonymes sur les deux sortes de nombres, sauf la soustraction : pas de confusion possible, car si la soustraction arithmétique est possible, la soustraction des n. qualifiés correspondants aura un résultat positif ; sinon, — négatif.

– En généralisant la division des nombres entiers qualifiés (et par suite aussi des nombres entiers absolus) on a construit l'ensemble des nombres rationnels qualifiés (de la forme : $\frac{+5}{-3}$) et l'on a défini pour ces nouveaux nombres 4 opérations analogues aux opérations arithmétiques, càd jouissant des mêmes propriétés combinatoires. Seulement la division est toujours possible (1) ~~[illegible]~~ Comme les nombres entiers ont les mêmes propriétés que l'ensemble des fractions de dénom 1, on les identifie ; on peut aussi assimiler les opérations homonymes, sauf la division. Seulement si la division des entiers est possible (càd a pour résultat un entier), la division des fractions correspondantes a pour résultat une fraction ayant pour numérateur cet entier et pour dénom 1.

(1) non seulement dans l'ensemble primitif, mais encore dans le nouvel ensemble.

En résumé, les 4 opérations arithmétiques sont toujours pos[sibles] et uniformes dans l'ensemble des nombres rationnels qualif[iés]. Elles ont conservé toutes leurs propriétés combinatoires, puis[que] c'est sur l'extension de leurs formules opératoires que repo[se] la généralisation du nombre. On remarquera le parallélis[me] complet entre les formules additives des nombres qualifiés [et] les formules multiplicatives des nombres fractionnaires. Ce[la] tient à ce que les opérations correspondantes obéissent aux mêmes lois formelles (associative, commutative) La seul[e] diversité vient de ~~~~ la relation non symétrique qui unit les 2 ordres d'opérations (la mult^on ~~est distributive~~ par rapport à l'addition, mais non l'addition par rapp à la mult[iplication])

$(a+b)c = ac + bc \qquad (a\times b) + c \gtrless (a+c)(b+[c])$

Ces remarques suggèrent l'idée d'une Théorie générale des opé[rations] considérées dans leurs propriétés formelles (Stolz, Hoüel, [...]) abstraction faite de leur sens « matériel », de leur contenu.

— Toutes les lois générales des nombres entiers étant justem[ent] indépendantes de leur nature intrinsèque propre, et reposant uniquement sur leurs propriétés combinatoires, restent [vraies] dans l'Arithmétique générale, c.à.d dans l'ensemble [des] nombres rationnels qualifiés. Exemple :

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \qquad (n+1)(n-1) = n^2 - 1$

Si l'on fait $a = n$ (entier) $b = 1$, on a le théorème :

Le carré de tout nombre entier est supérieur de une unité au produit des 2 nombres qui sont ses voisins dans la suite na[turelle]

— Mais la formule précédente est indépendante de la [nature] des nombres a, b, car elle repose sur la propriété distribu[tive] de la multiplication par rapport à l'addition (et à la sou[straction])

— On peut donc découvrir et démontrer toutes les lois générales

+ C'est la Logistique de Chasles et de Cournot.

l'Arithmétique en appliquant à des lettres les lois combinatoires des opérations arithmétiques, sans s'inquiéter de leur valeur ni même du sens réel des signes d'opération. On n'obtiendra jamais ainsi que des formules équivalentes, càd telles qu'elles aient la même valeur numérique, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. L'équivalence de 2 formules, càd leur égalité constante, indépendante des valeurs des lettres, s'appelle une identité algébrique. Le calcul algébrique consiste donc à faire abstraction de la nature des objets combinés et même de la nature des combinaisons : et c'est ce qui fait sa généralité. C'est pour lui assurer cette généralité qu'on a généralisé la soustraction et la division.
En effet, soit la formule: $a - b + c - d + e$
L'ordre dans lequel s'effectuent une suite de additions et de soustractions ~~est in~~différent, en Arithmétique, pourvu que les soustractions successives soient toujours possibles : or cela n'est pas, tant que a, b, c, d, e sont des nombres absolus. Au contraire, ce sera toujours possible dans le domaine ~~si a, b, c, d, e sont~~ des nombres qualifiés, car la formule précédente sera la somme des nombres qualifiés : $+a, -b, +c, -d, +e$, laquelle est toujours un nombre qualifié. Ainsi l'on peut intervertir l'ordre des termes sans aucune restriction.
Supposons maintenant que a, b, c, d, e soient des nombres qualifiés ; la formule précédente sera la somme des nombres qualifiés ; $a, + b' + c + d' + e$
b', d' désignant les nombres symétriques de b et de d.
Et comme on peut intervertir l'ordre des addit. et soustract. qualifiées d'une manière qcque sans changer le résultat (puisque ces opérations sont toujours possibles), on pourra écrire par ex :

$b' + a + d' + c + e$ ou $-b + a - d + c + e$

On est ~~ainsi~~ amené à cette convention :

Si a ~~est~~ un nombre qualifié qcque, $+a$ ~~est~~ désigne ce nombre et $-a$ désigne le nombre symétrique.

La ~~somme~~ formule précédente sera ~~alors~~ encore la somme des nombres qualifiés : $+a, \ -b, \ +c, \ -d, \ +e$

pris dans un ordre quelconque.

Distinction du signe vrai et du signe apparent d'un nombre.

~~+a~~ Si $a = -5$, $\quad +a = -5$, $\quad -a = +5$.

Ainsi toute formule d'addition et de soustraction se ramène à une somme de nombres qualifiés, non seulement quand les termes sont des n absolus, mais encore quand ils sont des nombres qualifiés. — Somme algébrique.

On appliquera donc, dans le calcul algébrique, aux lettres les mêmes règles de signes qu'aux nombres qualifiés.

Pour la multiplication et la division, la règle des signes subsiste en vertu de cette remarque que, dans une formule multiplicative, ~~o~~ le nombre des signes — est toujours pair : en effet

$$\begin{array}{cc|c} + & + & + \\ + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{array}$$

et de même pour la division (qui se réduit à la multiplication : l'inverse de a a le signe de a).

Or, quand on met en évidence le signe apparent et le signe réel d'un nombre ~~l'on~~ on trouve la même règle :

$+(+5) = +5, \quad +(-3) = -3, \quad -(+3) = -3, \quad -(-1) = +1.$

Par conséquent, pour effectuer le produit : $(\pm a)(\pm b)$, a et b étant des nombres qualifiés, on suivra la règle des signes car s'il y en a un nombre pair, le résultat est $+$; impair, $-$

La règle des signes s'étend à un ~~nombre~~ quelconque de facteurs si le nombre des signes — est pair, le résultat est $+$; impair, $-$.

donc dans une formule multiplicative, le nombre de tous les signes — est ~~pair~~ toujours pair.

C'est comme si chaque nombre avait pour coefficient $+1$ ou -1

Il faut donc bien distinguer les opérations algébriques portant sur des lettres ~~douées~~ affectées de signes apparents, des opérations arithmétiques portant sur des nombres qualifiés. (doués de signes réels)

Nous venons de définir les 4 opérations pour les monômes c à d formules algébriques où ne figurent que les signes × et : (se réduisant toujours à des produits : on peut donc exclure le signe :.) — Définition des polynômes : sommes ~~ou différences~~ algébriques de monômes (différence se ramène à somme)

Opérations sur les polynômes. Quel en est le but ?

La somme et le produit de 2 polynômes est un polynôme tel que sa valeur numérique soit toujours égale à la somme ou au produit des valeurs numériques de ces polynômes, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Addition des polynômes : On ~~ajoute~~ forme un polynôme contenant tous les termes des polynômes donnés (avec leur signe)

Soustraction des polynômes : Pour soustraire le polynôme B du polynôme A, on ajoute à A le pol B changé de signe. En effet, si dans un ~~somme algébrique~~ polynôme on change les signes de tous les termes, le nouv~~eau~~elle polynôme est le symétrique du précédent, c à d. prend une valeur symétrique pour toutes les valeurs numériques attribuées aux lettres. Or, en vertu de la définition de la soustraction des nombres qualifiés, retrancher un nombre, c'est ajouter son symétrique

Multiplication des polynômes : On multiplie chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur. En vertu de la loi distributive de la multiplication des nombres rationnels qualifiés, le polynôme ainsi obtenu sera ~~équivalent~~ égal au produit des deux polynômes donnés.

Par ex il ne faut pas appeler fractions algébriques les quotients de nombres rationnels qualifiés, qui sont (aussi) des nombres rationnels qualifiés.

Réduction des termes semblables (pour simplifier le résult
Chaque monome comprend un facteur numérique (coeffic
et une partie littérale. Les monomes semblables ont même pa
littérale : on les réduit en la mettant en facteur commun et
faisant la somme des coefficients qualifiés.
Pour plus de généralité, on représente aussi les coefficients pa
des lettres (les 1res de l'alphabet), et alors on adopte pour les let
indéterminées les dernières de l'alphabet, les 1res sont suppos
connues et déterminées. Les autres sont dites inconnues.
Pour reconnaître plus aisément l'identité de 2 polynom
on les ordonne suivant les puissances croissantes ou décroiss
d'une lettre, dite lettre ordonnatrice.
S'il y a plusieurs lettres, les coefficients d'un polynôme ord
peuvent être eux-mêmes des polynomes, qu'on peut ordon
par rapport à une autre lettre.
Degré d'un monome : nombre des facteurs simples incon
qu'il contient : $5a^3b^2$ a degré 5 ; $ax^3y^2z^2$, de
Degré d'un polynome : degré du monome de degré le plus
Polynome homogène : dont tous les termes sont de même d
(degré d'homogénéité) Ex : $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 +$
On peut ordonner un polynôme homogène à 2 incon
suivant les puissances croissantes de l'une et décroissantes
— On a nettement distingué les opérations algébriques, po
sur des formes littérales, des opérations arithmétiques
sur des nombres (rationnels qualifiés). Il faut de même distin
l'Arithmétique générale, science des nombres généralisés,
l'Algèbre qui a pour objet les formes littérales, leurs
naisons et leur équivalence. L'Algèbre a pour objet essen
l'étude des polynomes.

anna
nom
ente
on d
RZ

[5

10e Leçon

L'Algèbre est l'étude des polynômes, spécialement entiers (monômes entiers, c.à.d. non fractionnaires). On peut toujours définir leur égalité (équivalence) leur somme et leur produit, ce qui en fait des êtres mathématiques.
On peut toujours réduire et ordonner un polynome. Cette opération est seulement commode pour effectuer l'addition et la multiplication ; elle est nécessaire pour la division ; il convient même que les polynomes soient ordonnés suivant les puissances décroissantes de la même lettre (On supposera désormais que les polynomes ne contiennent qu'une inconnue).
La division est possible quand le dividende est le produit du diviseur B par un polynôme Q, dit quotient. Dans ce cas, le 1er terme du dividende est le produit des 1ers termes du diviseur et du quotient ; de même le dernier terme ; en vertu de la règle de multiplication (ordonnée). Donc le 1er terme du quotient est le quotient du 1er terme du dividende par le 1er terme du diviseur ; de même pour le dernier terme. D'où la règle de division.

Remarques : La division algébrique a sur la division arithmétique l'avantage que le résultat de chaque division partielle est toujours exact.
Pour que la division ne rencontre aucun obstacle, il faut que toutes les soustractions numériques soient possibles, et que les 1ers coefficients des restes partiels soient divisibles sans exception par le 1er coefficient du quotient. Pour cela, il suffit que les coefficients appartiennent à l'ensemble des n. ent. qual. où soustr. et div. sont possibles sans restriction.
[N.B : C'est pourquoi l'on considère les n. qualifiés comme algébriques ; ils ne le sont pas plus que les n. fractionnaires.]

Si la division n'est pas possible, comme on ne le sait pas d'avance, on l'essaie (ce qui suppose que le degré du diviseur est inférieur à celui du dividende.) Les divisions partielles sont possibles tant que le reste partiel est de degré au moins égal à celui du diviseur. Or le degré de chaque reste partiel est inférieur de 1 unité au moins à celui du précédent. Donc, au bout d'un nombre fini d'opérations on arrive soit à un reste identiquement nul, soit à un reste de degré inférieur au diviseur : dans ce dernier cas, la division est impossible ; mais on a :

$$R = A - BQ.$$

Si l'on appelle encore quotient le polynome obtenu Q, on dira que le quotient des 2 polynomes A et B est un polynome tel que la différence $A - BQ$ soit un polynome de degré inférieur à celui de B.

Identité de la division :

$$A = BQ + R$$

avec la condition ; degré de $R <$ degré de B. +

On démontre que le quotient et le reste d'une division sont uniques et bien déterminés.

Le cas où la division est possible devient le cas particulier où le reste R est identiquement nul. On écrit alors :

$$A = BQ \qquad Q = \frac{A}{B}.$$

Dans tout autre cas, la formule $\frac{A}{B}$ ne représente pas un polynome entier : elle pourra être évaluée en un nombre fractionnaire (sinon entier.) C'est ce qu'on appelle une fraction algébrique rationnelle. Le calcul des fractions algébriques est soumis à des règles analogues à celui des fractions arithmétiques, parce que les premières représentent au fond les secondes.

N.B. : Bien distinguer les fract. algébr. des fractions numériques qualifiées.

C'est là le premier exemple d'une opération possible numériq^t et impossible algébriq^t, ou plutôt, d'une opération alg. impossible correspondant à une opération arith. possible. Cela n'a rien d'étonnant, puisque le résultat de l'opérat. alg. doit être une formule générale qui contienne tous les résultats numériques de l'opération arithmétique.
~~Ainsi une fraction algébrique a toujours une tous numériques tout en restant irréductible~~ (eux)

Analogie entre les polynomes entiers et les nombres entiers. La division seule n'est pas toujours possible. Les polynomes jouissent donc des propriétés spéciales ~~sous~~ au point de vue de la divisibilité.

Théorème de Gauss: Si un polynome à coefficients entiers est décomposable en un produit de 2 polynomes, ceux-ci sont encore à coefficients entiers.

Il suffit donc de considérer les polynomes entiers à coefficients entiers sans ~~diviseurs~~ facteurs communs (car ces facteurs seraient des diviseurs numériques du polynome) Tous leurs diviseurs seront des polynomes de même forme.

Algorithme d'Euclide pour trouver le P G C D de deux polynomes. Repose sur l'identité de la division, et sur le principe de régression finie. Tout polynome qui divise A et B divise aussi BQ, et par suite A − BQ = R. Ainsi de suite. Les restes successifs ~~sont de~~ degrés décroissants, on doit arriver à un reste numérique (de degré 0.) Si ce reste est 0, le dernier diviseur est le P. G. C. D cherché; sinon, il n'y a pas de P. G. C. D. Les polynomes sont premiers entre eux (sans diviseur commun.)

Tout diviseur commun à A et B divise leur P G C D.
Si A et B ont pour pgcd D, AM et BM ont pour pgcd DM. Si A et B sont premiers entre eux, AM et BM ont pour pgcd M (Tout cela résulte de l'algorithme d'Euclide.)

Théorème fondamental. ~~Tout~~ Si un polynome C divise le produit de 2 polynomes A, B et est premier avec l'un d'eux (A), il doit diviser l'autre (B)
En effet, si A et C sont premiers entre eux, le pgcd de AB et BC doit être B. Or C divise AB et BC; donc il doit diviser leur pgcd B.

Corollaires: Tout polynome est irréductible ou admet un diviseur irréductible (D'où : existence des polyn. irréductibles.)
Tout polynome réductible est un produit de polynomes irréductibles; et cette décomposition ne peut avoir lieu que d'une seule manière, en vertu du théorème fondam qui engendre le corollaire suivant :
Un polynome irréductible C qui divise le produit de 2 pol A et B divise nécessairement l'un d'eux (car s'il ~~est~~ ne divise pas A, il est premier avec A; donc il divise B.)
Un polynome irréductible qui divise un produit de polyn irréductibles est identique à l'un d'eux
D'où l'on conclut l'identité de 2 décompositions d'un même polynome en facteurs irréductibles.

Remarque Toutes ces propositions sont analogues ou plutôt identiques par la forme aux propos. touchant la divisibilité des nombres entiers: cela vient de ce qu'elles sont des conséquences formelles de l'algorithme d'Euclide. On a ainsi un exemple d'un enchaînement de vérités formelles indépendantes de leur contenu, c.à d. des objets auxquels elles s'appliquent

mais il y a des polynomes irréductibles de tous les degrés : ex : $x^n + 2$.

Divisibilité par $(x-a)$ [Tous les binômes du 1er degré sont évidemment irréductibles.]

Le reste de la division d'un polynome entier en $\underline{x}$ par $(x-a)$ est égal au nombre qu'on obtient en donnant à $\underline{x}$ la valeur $\underline{a}$ dans ce polynôme.

~~Corolle~~ $P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$

R indépendant de $\underline{x}$; donc : $P(a) = R$.

Corollaire : Pour qu'un polynome entier en x soit divisible par $(x-a)$, il faut et il suffit qu'il s'annule quand on y donne à $\underline{x}$ la valeur $\underline{a}$: $P(a) = 0$.

: Pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par le produit de plusieurs binomes différents, il faut et il suffit qu'il soit divisible séparément par chacun d'eux.

Corollaire : Lorsqu'un polynome entier en $\underline{x}$, de degré $\underline{m}$, s'annule pour $\underline{m}$ valeurs différentes $a, b, c, \dots l$ attribuées à $\underline{x}$, il est équivalent au produit :

$$A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)$$

A étant le coefficient de son terme de degré le plus élevé.

– Lorsqu'un polynome entier réduit est équivalent à zéro, il est identiquement nul c.à.d. que tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire : Deux polynomes entiers réduits équivalents sont identiques (égaux terme à terme)

Lorsqu'un polynome entier en $\underline{x}$, de degré $\underline{m}$, s'annule pour plus de $\underline{m}$ valeurs distinctes de $\underline{x}$, il est équivalent à zéro, donc identiquement nul.

– En somme, l'Algèbre est comme l'Arithmétique des polynomes : les polynomes en sont les éléments, comme les nombres ceux de l'Arithmétique.

(théorie des polynomes) 11e Leçon.

L'Algèbre comprend la théorie des équations : c'est la recherche des valeurs des inconnus qui annulent les polynomes. Une équation est une égalité conditionnelle entre deux formules qui n'est pas une identité, les 2 membres ne sont pas équivalents, contenant des inconnues ; ~~en plus général~~ elle est une condition que ces inconnues doivent vérifier. Elle a donc pour effet de restreindre leur indétermination.

Théoriquement, et en général, il faut n équations pour déterminer n inconnues. En effet, on peut tirer de l'une d'elles l'expression de x_1 en fonction des $(n-1)$ inconnues, et porter celle-ci dans les $(n-1)$ autres équations ; on a un système de $(n-1)$ éq. à $(n-1)$ inc. On le réduit de même, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'1 équation à 1 inconnue. Nous nous occuperons seulement des équations de ce type. (à 1 inconnue)

Dans une équation quelconque, on peut chasser les dénominateurs, faire disparaître les radicaux littéraux et faire passer tous les termes dans un membre (le 1er par ex.), ~~le~~ le 2e étant 0. Le 1er membre est alors un polynome entier rationnel en x, de degré m. Il s'agit de trouver les valeurs de x qui l'annulent : ce sont les racines de l'équation (ou du polynome).

On peut rendre tous les coefficients entiers, en multipliant par le ppcm des dénominateurs ; on rend le 1er coefficient égal à 1, en divisant tous les autres par lui.

On suppose que le polynome n'est pas identiquement nul ; dans cette hypothèse, on sait qu'il ne peut avoir plus de m racines distinctes.

---

(1) C'est alors (et alors seulement) qu'on peut dire que l'équation est elle-même de degré m.

Si le polynome a m racines distinctes $(a, b, c, \dots l)$, on sait qu'il est équivalent à : $A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)$

Or deux polynômes réduits équivalents sont identiques. On peut donc construire le polynome qui a ces m racines. (Supposons, pour simplifier, $A = 1$)

Le 1er terme sera x^m ; et le 2e terme x^{m-1} aura pour coefficient $-\Sigma a$; le 3e, x^{m-2}, aura pour coeff. $+\Sigma ab$; le 4e, x^{m-3} $-\Sigma abc$; etc. enfin le dernier terme (indépendant de x) sera le produit $(-a)(-b)(-c)\dots(-l) = (-1)^m \Pi a$.

Les polynômes Σa, Σab, Σabc, ... et Πa s'appellent les fonctions symétriques élémentaires des racines : symétriques, parce qu'elles ne changent pas quand on y remplace une racine par une autre, ou quand on permute leur ordre. On les désigne par $S_1, S_2, \dots S_m$.

Si d'autre part on écrit le polynome sous la forme :

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^m p_m,$$

on doit avoir les égalités suivantes :

$$S_1 = p_1 \qquad S_2 = p_2 \quad \dots \qquad S_m = p_m.$$

Ces m équations déterminent les m racines inconnues ; elles peuvent donc remplacer l'équation proposée, c.à.d. les m égalités : $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, ... $f(l) = 0$.

— Réciproquement, si un polynome peut se décomposer en un produit de m binômes du 1er degré, il aura m racines.

Or, pour qu'un polynome s'annule pour $x = a$, il faut et il suffit qu'il soit divisible par le binôme $(x - a)$

En effet, pour qu'un produit s'annule, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs annule. Pour que le binôme $(x - a) = 0$, il faut que : $x = a$

En général, toute équation du 1er degré a une racine, et une seule. Cela résulte de la création des nombres rationnels qualifiés : car elle permet de faire passer tous les termes ~~dans~~ en x dans un membre : $ax = b$ ~~ax + b~~

et de diviser par a (supposé $\gtrless 0$) d'où : $x = \frac{b}{a}$.

On trouve ~~pour~~ toujours pour x une valeur rationnelle, pourvu que a et b soient eux-mêmes rationnels.

Pour l'équation du 2e degré, on ne peut plus affirmer qu'elle a toujours une racine (rationnelle.) En effet, on peut toujours la mettre sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (1) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Pour que cette formule algébrique ait un sens numérique, il faut que $\frac{p^2}{4} - q$ ~~soit un carré parfait~~ ait une racine parfaite, ce qui est un cas exceptionnel. D'abord, il faut que $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ soit positif (aucun carré n'étant négatif.) Ensuite il faut que ce soit un entier ou une fraction carré parfait. Hors de ce cas, il n'y a pas de nombre qui soit représenté par le radical $\sqrt{\ }$, donc pas de racine ~~ou~~ de l'équation.

N. B. Les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, n'ont pas de sens en Arithmétique : ce ne sont pas des nombres, car si l'on essaie de les calculer, on n'y parvient pas : ils sont incalculables. On dit qu'on en ~~et~~ calcule des valeurs approchées autant qu'on le désire : mais approchées de quoi ? puisque la valeur exacte n'existe pas.

(1) Car a^2 est le carré de $+a$ comme de $-a$.

5e Leçon.

Une équation de degré quelconque a-t-elle une racine (rationnelle) ? Non, puisqu'il y a des polynomes irréductibles (sans diviseurs rationnels) Ex :

$(x^n + 2)$ $\qquad x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ (p premier.)

Pour que toute équation algébrique ait une racine il faut étendre le domaine dans lequel ~~doit~~ se trouver cette racine, càd. généraliser encore la notion de nombre.

On introduit d'abord les nombres irrationnels, qui, ajoutés à l'ensemble des nombres rationnels, forment un ensemble continu linéaire (à 1 dimension). Dans cet ensemble, des nombres réels, un nombre positif quelconque a une racine d'ordre quelconque : autrement dit, l'équation : $x^n - a = 0$ est résoluble si $a > 0$.

Seulement ~~le~~ un nombre négatif n'a pas de racines d'ordre pair. C'est une exception et un obstacle.

On crée alors l'ensemble des nombres imaginaires ou complexes, dont chacun est formé de 2 nombres réels accouplés. Cet ensemble est continu à 2 dimensions, parce qu'il y a 2 éléments qui varient indépendamment ; il faut 2 conditions pour définir l'égalité de 2 nombres. Dans cet ensemble + on définit toutes les opérations arithmétiques ; l'extraction des racines y est toujours possible, même pour les racines d'ordre pair des nombres négatifs ; un nombre quelconque de l'ensemble a m racines d'ordre m. En somme, c'est un ensemble où toutes les [six] opérations arithmétiques sont possibles sans restriction.

+ renferme l'ensemble des nombres réels comme cas particulier des nombres complexes (le 2e élément est nul)

Cela posé, on conçoit (avec Descartes) ✕ l'inconnue x comme une variable indépendante pouvant passer avec continuité par une suite de valeurs ~~réelles et~~ complexes (réelles en particulier.) Les coefficients du polynome sont également des nombres complexes, mais connus et constants. Dans ces conditions pour chaque valeur de x le polynome prend une valeur complexe bien ~~complexe~~ déterminée; il établit une correspondance entre la suite des valeurs de x et une suite d'autres valeurs qu'on peut figurer par une variable dépendante y: en somme le polynome est conçu comme une fonction de x; c'est ce qu'on appelle une fonction entière: $y = f(x)$.

On démontre que, quand x varie d'une manière continue, y varie d'une manière continue, c.à.d. ~~qu~~ est une fonction continue de x. Dès lors, la fonction entière jouit des propriétés des fonctions continues: elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires en particulier, elle ne peut passer du positif au négatif, ou inversement, sans prendre la valeur 0. On a ainsi un moyen de savoir quand elle s'annule, et par suite, de séparer ses racines, c.à.d. de déterminer les intervalles où elle s'annule ✕

Grâce à la continuité, on démontre qu'une fonction entière à coefficients complexes d'une variable complexe a toujours une racine complexe, c.à.d. qu'il existe dans l'ensemble des nombres complexes une valeur qui, attribuée à x, annule la fonction (le polynome.) Quand on ~~dit~~ affirme ce théorème d'un polynome à coefficients réels, rationnels ou même entiers, il faut sous-entendre que ces coefficients sont conçus comme complexes et identifiés aux nombres complexes correspondants (Méray)

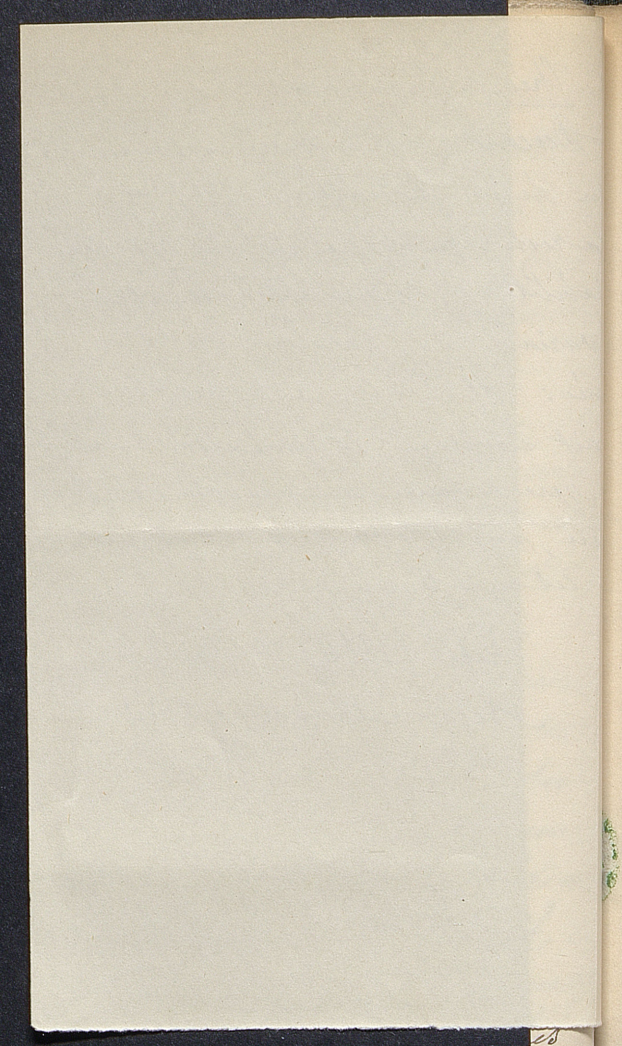
✕ Puis on resserre progressivement l'intervalle pour obtenir une valeur exacte ou approchée de la racine qu'il contient: Résolution numérique des équations.

olk : Théorie générale de l'élimination :

C'est Descartes qui le premier considéra
lution d'une équation : $f(x) = 0$
la recherche des restrictions apportées
variabilité de la quantité essentiel-
t variable x, par la condition
minée : $f(x) = 0$. Avant lui,
n'avait envisagé la résolution des
ons que comme la recherche des
s qui, substituées aux inconnues,
ent ces équations. »

Thèse (1884)

Acta mathematica, t. VI.



Or en procédant ainsi, on fait de l'Analyse ; on fait appel à l'idée de continuité, c.à.d. à la notion de grandeur, car le nombre n'enveloppe nullement le continu, il y répugne au contraire. On considère des variations continues, une variable indépendante et une fonction (avec ses dérivées), considérations étrangères à l'Algèbre où il ne s'agit que de calculer des nombres inconnus au moyen de nombres connus auxquels ils sont liés par certaines relations (équations). L'Algèbre se fond pour ainsi dire dans l'Analyse et les polynomes se perdent parmi les fonctions analytiques.

D'autre part, le problème était de trouver des racines pour toute équation algébrique à coefficients rationnels (ou même entiers) car, en somme, c'est de l'ensemble des nombres entiers qu'on part, et il n'existe en définitive que celui-là. Or l'ensemble des nombres ~~nécessaires pour que la~~ algébriques, c.à.d. des racines de telles équations, ne forme qu'une infime minorité dans l'ensemble des nombres complexes et même dans celui des nombres réels car il n'est pas continu. On a donc dépassé le but énormément : on a créé infiniment plus de nombres qu'il n'est nécessaire pour résoudre les équations à coefficients rationnels. Parmi les nombres irrationnels (réels) et à fortiori parmi les nombres complexes, il y a infiniment plus de nombres transcendants que de nombres algébriques. Il y a une disproportion énorme entre le moyen et la fin, entre l'ensemble continu à 2 dimensions qu'on a dû construire pour établir l'existence des racines de toute éq. alg. et l'ensemble de ces racines elles-mêmes. Encore une fois, l'Algèbre se noie dans l'Analyse.

Ce sont ces considérations qui ont déterminé les algébristes modernes à essayer d'une autre méthode, plus logique et plus économique. Ils se sont astreints à ne pas sortir du domaine de l'arithmétique, et se sont proposés de créer strictement les nombres nécessaires et suffisants à la résolution des équations algébriques à coefficients entiers; autrement dit, de construire l'ensemble des nombres algébriques sans faire appel à aucun nombre transcendant et à aucun raisonnement analytique. Mais alors, on ne peut plus démontrer l'existence d'une racine pour ~~toute~~ équation algébrique: car dire qu'~~une racine~~ il existe ~~c'est dire~~ une racine d'une équation, c'est dire que cette équation est vérifiée par un nombre appartenant à un ensemble défini et connu préalablement. Or, ~~tout~~ au contraire on ne peut à présent définir les nombres algébriques que comme racines d'équations algébriques. Leur existence n'est ~~de~~ plus que l'objet d'une définition ou d'un postulat: on les crée par un acte arbitraire de l'esprit. ~~Tout ce~~ Une telle définition est légitime, pourvu qu'elle ne soit ni contradictoire ni équivoque. On démontre qu'elle ne donne lieu à aucune contradiction. Mais elle donne lieu du moins à une certaine ambiguïté, parce qu'en attribuant en bloc n racines à chaque équation irréductible de degré n, on n'a aucun moyen de les distinguer, puisqu'elles ~~sont définies symétriquement~~ ont une seule définition, commune et symétrique. Elles sont donc ~~indiscernables~~ déterminées, à l'ordre près; et si on les range en deux ordres différents, les 2 systèmes de racines seront indiscernables, puisqu'ils vérifieront également la même équation. C'est ce qui explique l'intervention de la science de l'ordre dans la résolution algébrique des équations.

Résoudre algébriquement une équation, c'est trouver une fonction algébrique des coefficients qui, substituée à l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation. —
Une fonction est algébrique quand elle peut s'exprimer au moyen des 6 opérations de l'Arithmétique : en particulier, au moyen de ~~radicaux~~ l'extraction des racines : c'est pourquoi une éq. résoluble algᵗ. est dite aussi <u>résoluble par radicaux</u>. Or l'extraction des racines équivaut à la résolution numérique des équations binômes : $x^n = A$, de sorte que la résolution <u>algébrique</u> consiste à ramener la résolution numérique d'une éq. à celle d'éq. binômes.
<u>Lagrange</u> ramena la résolution alg. des 4 premiers degrés à une méthode générale, qui consiste à ~~évaluer~~ déterminer une fonction rationnelle linéaire des racines, en tenant compte des diverses valeurs qu'elle prend par la substitution des racines (c. à d. l'interversion de leur ordre)
<u>Abel</u> démontra l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales de degré supér à 4. Il trouva une classe d'équations résolubles par radicaux, dites <u>équations abéliennes</u> (éq. irréductibles dont les racines peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'elles) Exemple : les équations de la division du cercle (étudiées par <u>Gauss</u>) : $x^n = 1$.
<u>Galois</u> ~~assoit la théorie des équations sur sa base définitive~~ + ~~en montrant qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent~~ ses substitue à la considération de l'équation celle des relations

+ ce qui le distingue de Abel, suivant la remarque de Kronecker.

entre les racines et les coefficients :

$$S_1 = p_1, \quad S_2 = p_2, \quad \dots \quad S_n = p_n,$$

$S_1\, S_2 \dots S_n$ étant les fonctions symétriques élémentaires des racines. On voit que l'ordre des racines est indéterminé. Si on les permute de toutes les manières, il y aura des ~~perm~~ substitutions qui ne changeront pas $f(x)$, et d'autres qui la feront varier. L'ensemble des premières forme le groupe de l'équation. Ce groupe caractérise le degré de symétrie qui existe entre les racines. Ainsi « à chaque équation correspond un groupe de substitutions, dans lequel se reflètent ses caractères essentiels, notamment ~~ceux~~ ceux qui ont trait à sa résolution par des équations auxiliaires. Étant donnée une équation qcque il suffit de connaître une de ses propriétés caractéristiques pour déterminer son groupe, d'où l'on déduit réciproquement toutes ses autres propriétés » (Jordan)

Galois conçoit la résolution algébrique d'une équation comme l'expression de ses racines au moyen des racines d'équations auxiliaires ou adjointes. Une équation irréductible (dans le domaine rationnel) devient réductible par l'adjonction d'une irrationnelle définie comme racine d'une équation auxiliaire ; et en même temps, le groupe de l'équation se simplifie et se réduit. On diminue ainsi progressivement la symétrie des racines, c.à.d. leur indétermination, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus les permuter (le groupe ne contient que la substitution identique)

Le problème de la résolution par radicaux n'est plus qu'un cas particulier : il correspond au cas où les équations adjointes sont des équations binômes.

Ainsi la réduction progressive de une équation est parallèle à la réduction de son groupe. [Conclusion de Galois : Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble il faut et il suffit que son groupe soit composé uniquement de substitutions linéaires.] Dans ce cas, toutes les racines sont exprimables en fonction rationnelle de 2 quelconques d'entre elles.]

leçon

En résumé, l'Algèbre n'est pas une science indépendante et qui se suffise à elle-même. Le théorème fondamental de l'Algèbre est une proposition de Analyse, et la résolution numérique des équations repose sur des considérations analytiques. Quant à la résolution algébrique, elle fait appel à l'idée de ordre à tel point que la théorie des équations se confond avec la théorie des substitutions. Ainsi l'Algèbre ne s'achève que dans l'Analyse et dans la Syntactique ; issue de l'idée de nombre, elle est obligée de recourir aux idées de ordre et de grandeur.

12e leçon (suite) à la page 78.

Le théorème : « Si un polynome $f(x)$ a pour racine a, il est divisible par $(x-a)$; et réciproquement » ramène la recherche des racines à celle des diviseurs, c. à d. la théorie des équations à la th. de la divisibilité des polynomes. Cette remarque a une portée générale.

Si l'on définit n symboles comme racines de l'éq. irréductible de degré n. $f(x)=0$

toutes les relations rationnelles que vérifient ces n

symboles sont des conséquences nécessaires de l'éq. $f(x)=0$
c.à.d. que tous les polynômes qui s'annulent pour un de ces symboles sont divisibles par le polynôme $f(x)$, qu'ils sont censés annuler. S
Ainsi le calcul de ~~x~~ nombre algébrique x, se réduit à celui des polynômes entiers en x (x indéterminée), en négligeant les multiples de $f(x)$; autrement dit, à un calcul de congruences [mod. $f(x)$].
On ~~parvient~~ évite ainsi d'employer les nombres algébriques, qui selon Kronecker, sont de purs symboles, des abréviations ou des artifices de langage. Par ex. on se dispense d'introduire les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$ en remplaçant l'éq:
$F(\sqrt{2})=0$ par la congruence $F(x)\equiv 0$ [mod. x^2-2]
De même on se dispense d'introduire les nombres imaginaires (c.à.d. le symbole $\sqrt{-1}$) en remplaçant les équations entre n. imaginaires par des congruences [mod. x^2+1].
Remarque: C'est le développement d'une idée de Galois: on introduit une nouvelle quantité en adjoignant une équation à celles qu'on l'on considère, et en considérant cette équation comme vérifiée, ce qui revient à annuler les multiples de son 1er membre
En somme, cette conception, où l'on se passe de toutes les généralisations du nombre, aboutit à réduire l'Algèbre à la théorie des fonctions entières à coefficients entiers de nombres (entiers) indéterminés. Une telle fonction représente un ensemble de nombres entiers, et rien de plus. L'Algèbre n'est plus qu'un prolongement de l'Arithmétique: elle repose tout entière sur la notion de divisibilité: il n'est plus question d'équations à résoudre ni de nombres algébriques. (v. conclusion de Molk)

S On dira que $F(x)$ a pour racine un n. alg. défini par $f(x)=0$, si $F(x)$ est divisible par $f(x)$, c.à.d. si: $F(x)\equiv 0$ [mod $f(x)$]

(Voir la suite page 79)

12e leçon

Le résultat ultime de la généralisation algébrique du nombre est l'ensemble des nombres algébriques. Cet ensemble forme l'objet d'une Arithmétique générale la plus générale de toutes.

On appelle nombre algébrique toute racine d'une équation algébrique entière) à coefficients entiers :
eux

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Une telle équation a n racines, soit par construction préalable de l'ensemble des nombres complexes, soit par ~~définition~~ convention. Dans ce dernier cas, elle suffit à définir ces n nombres algébriques (à l'ordre près)

On peut indifféremment supposer les coeff. rationnels ou entiers : car s'ils sont fractionnaires, on les rendra tous entiers en les multipliant par un même nombre entier.

Un nombre algébrique est entier quand $a_0 = 1$.

Supposons $a_0 \gtrless 1$; multiplions par a_0^{n-1} :

$$a_0^n x^n + a_0^{n-1} a_1 x^{n-1} + a_0^{n-1} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_0^{n-1} a_{n-1} x + a_n a_0^{n-1} = 0$$

Posons : $a_0 x = y$

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} x + a_n a_0^{n-1} = 0$$

Les n racines $y_1\, y_2 \ldots y_n$ de cette nouvelle équation sont des nombres algébriques entiers : or les n racines $x_1\, x_2 \ldots x_n$ de la 1re s'obtiennent en les divisant par a_0. D'où :

Théorème. Les nombres algébriques non entiers sont les quotients des nombres algs entiers par des n. entiers.

On peut se contenter d'étudier les n alg. entiers.

La somme, la différence, le produit de 2 nombres alg. entiers sont aussi des nombres algébriques entiers.
Un nombre alg. entier α est divisible par le n. alg. entier β si l'on a : $\alpha = \beta\gamma$, γ étant un n. alg. entier.
On appelle unités les nombres qui divisent tous les nombres algébriques entiers.
Toute unité divise 1 ; tout diviseur de 1 est une unité.
Le produit et le quotient de 2 unités est une unité.
Deux nombres associés ~~sont divisibles~~ l'un par l'autre.
Chacun d'eux est le produit de l'autre par une unité :

$$\alpha' = \alpha\varepsilon, \qquad \alpha = \alpha'\varepsilon' \qquad \varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tout nombre alg. entier est décomposable en facteurs alg. entiers, et cela d'une infinité de manières. Ex :

$$\alpha = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}, \qquad (\beta^2 - \beta + \alpha = 0.$$

(ou bien : $\alpha = \beta_1 \beta_2$, $\beta_1 \beta_2$ étant racines de :)
Il n'y a donc pas, dans l'ensemble des n. alg. entiers, de nombres premiers.
Il en est plus de même dans un corps fini relatif à une équation irréductible de degré n : $f(x) = 0$.
Soit θ une de ses racines ; l'ensemble des nombres de la forme : $\omega = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$
constitue le corps fini Ω de degré n. ($a_0\ a_1 \dots a_{n-1}$ nombres rationnels)
Propriété caractéristique du corps : la somme, la différence, le produit et le quotient de 2 nombres de l'ensemble appartiennent encore à cet ensemble.
Tout corps fini contient l'ensemble des nombres rationnels qualifiés : car il doit contenir $1 = \frac{a}{a}$.

Si l'on choisit n nombres indépendants (dans le corps Ω) $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$, tout nombre du corps pourra s'exprimer (et d'une seule manière) en fonction linéaire de ces n nombres c.à.d. sous la forme:

$$\omega = d_1\omega_1 + d_2\omega_2 + \dots + d_n\omega_n$$

$d_1 d_2 \dots d_n$ étant des nombres rationnels. L'ensemble des n nombres ω forme une base du corps Ω.

On peut trouver (dans certains cas) une base composée de nombres alg. entiers ($\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$) et telle que tous les nombres alg. entiers du corps soient des fonctions linéaires à coefficients entiers de ces nombres:

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n.$$

En d'autres termes, l'ensemble des n. alg. entiers du corps Ω est l'ensemble des multiples des nombres α et des sommes de ces multiples. C'est un module c.à.d. un ensemble de nombres tels que la somme et la différence de 2 n. qq. de l'ensemble appartiennent au même ensemble.

N. B. Cela n'a pas lieu pour un corps fini quelconque.

— Dans l'ensemble des nombres alg. entiers ~~d'un~~ (certains) corps finis, il existe des nombres indécomposables en produit de 2 autres (dont aucun n'est une unité), mais ces nombres ne jouissent pas de la propriété fondamentale des nombres premiers: à savoir, que tout nombre premier qui divise un produit de 2 facteurs divise l'un d'eux. Il en résulte qu'un nombre est décomposable en général de plusieurs manières en produit de facteurs indécomposables. On a par ex. des égalités de la forme

$$ab = cd$$

a, b, c, d étant des nombres indécomposables (On voit que c divise le produit ab sans diviser ni a ni b.)

Pour remédier à cette difficulté et rendre la divisibilité des nombres alg. entiers semblable à celle des nombres entiers, Kummer a eu l'idée de considérer les nombres indécomposables comme des produits de facteurs premiers idéaux.

Par ex : si l'on admet que : $a = \alpha\beta$, $b = \gamma\delta$,
$c = \alpha\gamma$, $d = \beta\delta$,

~~on aura~~ l'égalité : $ab = cd$ deviendra ~~ou~~ : $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta$
identité entre 2 produits de facteurs premiers.

Or cette hypothèse réussit, c.à.d. que les nombres idéaux ainsi imaginés et définis jouent le rôle de facteurs premiers ; ils possèdent toutes les propriétés des nombres premiers, et par suite tous les théorèmes de divisibilité valent pour les nombres algébriques entiers ; en partic. celui qui les résume tous : grâce à la création des nombres idéaux

Un nombre alg. entier, ou bien est premier, ou bien est décomposable d'une seule manière en un produit de facteurs premiers (réels ou idéaux)

Comme il est assez scabreux de raisonner sur des nombres idéaux (irréels), M. Dedekind a cherché à s'en passer, et s'est efforcé de définir les relations de divisibilité sans sortir du domaine des nombres algébriques réels. Or il a remarqué que les ~~nombres~~ nombres alg. entiers divisibles par un même nombre idéal sont caractérisés par certaines propriétés, c.à.d. vérifient certaines relations (congruences) entre termes réels. Il suffit donc de considérer ces propriétés comme définissant leur ensemble qu'il appelle un idéal. Ainsi un idéal est l'ensemble des n. alg. ent. réels divisibles par un nombre idéal de Kummer.

D'autre part, les idéaux jouissent des propriétés caractéristiques suivantes :

La somme et la différence de 2 nombres d'un idéal sont des nombres du même idéal ;

Le produit d'un nombre de l'idéal par un nombre alg. entier qcq. ~~appartient~~ est un nombre de cet idéal.

Dès lors, on peut ~~prendre~~ définir les idéaux par ces propriétés purement réelles, et se passer de la considération des nombres idéaux.

Certains idéaux correspondent à des n. alg. réels, c.à.d. chacun est ~~tout~~ l'ensemble des multiples d'un n. alg. réel entier.
On les appelle des idéaux principaux. Exemples.

On définit la multiplication et la divisibilité des idéaux : ce qui remplace la multiplication et la divisibilité des nombres idéaux correspondants.

On retrouve comme cas particulier la divisibilité des nombres entiers : ainsi : un idéal A est divisible par un idéal B quand il est contenu dans cet idéal.

Par ex. l'idéal principal : 6, 12, 18, 24, ...
est contenu dans ~~contient~~ les 2 idéaux : 2, 4, 6, 8, 10, ...
et : 3, 6, 9, 12, 15 ....
parce que 6 est ~~divisible~~ par 2 et par 3.

En résumé, la divisibilité des idéaux équivaut à la divisibilité des nombres corresp. mais elle est plus générale ou du moins a l'avantage de reposer sur des faits du domaine des nombres algébriques réels. — On définit
On peut alors démontrer le théorème fondamental :
les idéaux premiers, qui correspondent aux n. idéaux premiers.

~~Tout~~ Si un idéal premier divise le produit de 2 idéaux, il divise l'un d'eux;
d'où l'on conclut:

Tout idéal qui n'est pas premier peut se décomposer d'une seule manière en un produit d'idéaux premiers (en nombre fini)

Dès lors, tout se passe comme en Arithmétique.

De même que la théorie des congruences a été calquée expressément sur la théorie des équations, la théorie des nombres algébriques a été imitée de la théorie des nombres entiers, et l'on a ~~inventé~~ cherché à rendre l'analogie et le parallélisme complets. ~~Il en sort deux~~ Cela suggère deux remarques intéressantes:

1° Lorsque l'on a pu établir, pour un ensemble quelconque d'objets, un enchaînement de propositions résultant logiquement de quelques ~~principes~~ hypothèses, à tout ensemble qui vérifie ces hypothèses ~~on~~ on peut appliquer toutes ces propositions (il y a identité formelle entre les 2 groupes de vérités)

2° On peut remplacer l'étude directe d'un objet par la considération de l'ensemble des objets qui sont dans une relation définie avec cet objet, pourvu qu'on puisse définir cet ensemble par une propriété caractéristique indépendante de ~~l'existence~~ cet objet.

Nous allons voir justement une application de cette remarque dans la conception arithmétique de l'Algèbre, dont l'idéal est de se passer des nombres algébriques (tandis que l'idéal de l'ancienne Algèbre était de trouver le plus de racines possibles pour une équation: cet idéal est pratique, l'idéal moderne est logique)

(Suite p. 71.)

Selon Molk, toutes les méthodes employées en Algèbre reviennent à la recherche du plus grand commun diviseur. La notion de divisibilité domine l'Algèbre tout entière, comme l'Arithmétique.

Au fond, au point de vue purement arithmétique de Kronecker, il n'y a de réel que le nombre entier. Toutes les autres espèces de nombres, y compris les nombres rationnels qualifiés, ne se définissent que par rapport aux nombres entiers, et peuvent être évités & remplacés par des systèmes de relations (congruences) où n'entrent que des nombres entiers. Les nombres algébriques ne sont que des symboles, des abréviations de langage qui servent à désigner certains faits de divisibilité. Ainsi la généralisation arithmético-algébrique du nombre se ruine elle-même et s'évanouit, quand on la pousse à l'extrême rigueur logique. Toutes les extensions du domaine du nombre sont fictives; ~~et~~ on croyait en sortir; on y est sans cesse ramené, ~~on y rentre~~ ou plutôt on ne l'a jamais quitté ni dépassé.

Les nombres algébriques (y compris les n rationnels qualifiés) n'ont donc ~~qu'une existence hypothétique~~ par de raison d'être en Algèbre: ce ne sont que de purs symboles vérifiant par définition certaines relations formelles, et auxquels on peut appliquer sans contradiction les règles du calcul arithmétique comme si c'étaient des nombres réels (entiers). L'Algèbre est à ce point de vue l'art de combiner logiquement des symboles vides de sens.

De même, la considération de la limite d'une suite ou d'une fonction peut se ramener à la considération de cette suite ou fonction en tant qu'elle est convergente; et la convergence se définit indépendamment de l'existence de la limite, à laquelle elle équivaut du reste (v. Remarque de la p. 180).

Nous concevons l'Algèbre d'une manière différente, moins factice et moins vide. Nous attribuerons aux symboles algébriques une existence hypothétique : ~~Soit un~~ Supposons qu'il existe un ensemble d'objets pour lesquels on puisse définir l'égalité et deux sortes de combinaisons ~~qu'on~~ qui possèdent les propriétés formelles de l'addition et de la multiplication des nombres, et qu'on appellera par suite du même nom ; supposons en outre que les opérations inverses y soient toujours possibles, même l'extraction des racines ; supposons enfin que cet ensemble (à 2 dimensions) soit continu ; ~~il existera dans cet ensemble n objets qui vérifieront~~ une équation algéb. de degré n indiquera une série de combinaisons additives & multiplicatives à effectuer sur des objets de l'ensemble, et dont le résultat doit être nul (1). Eh bien ! il existe dans un tel ensemble n objets qui vérifient cette équation, et qui correspondent aux n ~~Seules~~ nombres algébriques, qui les réalisent.

Seulement il faut ~~bien~~ remarquer que ces objets ne sont plus des nombres, mais des grandeurs : cet ensemble est le plan cartésien ; et qu'il ne s'agit plus d'opérations arithmétiques, mais de combinaisons homonymes & homolo[gues] portant sur des grandeurs. C'est ce qui fait la valeur générale et l'utilité de l'Algèbre, conçue comme un formalisme abstrait et vide : elle s'applique indifféremment à tout contenu qui se prête à ses combinaisons formelles. C'est Descartes qui a conçu l'Algèbre comme un instrument universel pouvant porter ~~directement~~ sur les grandeurs ; comme un organon, une Logique, une Logistique, ~~comme~~ mais la Mathématique universelle.

~~ce n'est pas un prolongement de l'Arithmétique~~

(1) L'objet nul est le module de l'addition.

13e leçon

L'idée d'ordre sert de fondement à une science mathématique distincte, que Sylvester appelait la Tactique, et Cournot la Syntactique. Cette science est indépendante de celle des nombres, mais elle a avec elle des rapports étroits, car on ne peut considérer l'ordre sans tenir compte des objets ordonnés.

La même abstraction qui sert ~~de base~~ à l'idée de nombre sert aussi de base à l'idée d'ordre (directement) : c'est l'idée d'unité. Tout ordre implique en effet des choses ordonnées ; or on fait abstraction de la nature et de la grandeur de ces choses pour ne considérer en chacune que son unité. Chacune vaut ou représente une unité. Or, dès que l'on considère une pluralité d'unités, on a un nombre ; mais, inversement, un nombre (multitude d'unités) n'implique aucun ordre entre les unités constituantes. Ainsi l'idée d'ordre implique l'idée de nombre, mais elle est plus complexe, ~~et~~ de sorte que ses propriétés ne résultent pas des propriétés ~~ou lois~~ du nombre ou des lois arithmétiques. Elles forment l'objet d'une science à part.

On sait que le nombre (cardinal) d'une collection d'objets (d'unités) est indépendant de leur ordre. Cela vient de ce que ces objets sont conçus comme des unités équivalentes et indiscernables. Mais si l'on distingue ces unités, leur ordre n'est plus indifférent : on pourra distinguer plusieurs manières de les ranger, c.à d. leurs permutations.

(Ceci n'est pas exact : le nombre cardinal lui-même suppose que les unités constituantes ~~[illegible]~~ sont distinctes, sans quoi il se réduirait à un)

Problème du nombre des permutations de $\underline{n}$ objets

(on prend pour exemple des lettres : $a, b, c \ldots$
ou encore une même lettre affectée d'indices : $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$
ce qui revient à opérer sur les nombres eux-mêmes conçus
comme ~~nombres ordinaux, c.à.d. numéros d'ordre~~ des numéros, c.à.d. des jetons ou autres objets concrets
(Il ne faut pas croire que, parce qu'on opère sur des nombres
on fasse de l'Arithmétique.)

Pour 2 objets : $P_2 = 2$. (fait de intuition)

Pour 3 objets : on peut prendre l'un d'eux pour le 1er,
et effectuer sur les autres les permutations possibles : on
~~aur~~a ainsi : $P_3 = 3P_2 = 2.3$.

Pour 4 objets : on prendra chacun d'eux pour le 1er, et
l'on effectuera sur les 3 autres toutes les permutations :
donc $P_4 = 4P_3 = 2.3.4$.

Le raisonnement est général : pour obtenir toutes les
permutations de $(n+1)$ objets, on prendra chacun d'eux
pour le 1er, et on lui adjoindra les permutations des $\underline{n}$
autres objets : donc $P_{n+1} = (n+1)\,P_n$.

Formule générale : $P_n = 1.2.3 \ldots n$
démontrée par induction complète : elle est vraie pour $n=2$
(c'est un fait) ; si elle est vraie pour n, elle l'est pour $n+1$
(en vertu de la formule de récurrence : $P_{n+1} = (n+1)\,P_n$.

On représente le produit des $\underline{n}$ premiers nombres entiers par
$n!$ (factorielle $\underline{n}$)

Arrangements de m lettres n à n $(n<m.)$:
Tous les assemblages qu'on peut former en ~~écrivant~~ prenant n des m lettres et en les rangeant dans un ordre quelconque; 2 arrangements diffèrent, soit par l'ordre des lettres, soit par la nature des lettres qu'ils contiennent.
Les arrangements 1 à 1 sont les m lettres elles-mêmes:

$$A_m^1 = m$$

Les arrangements 2 à 2 s'obtiennent en écrivant à la suite de chacune d'elles chacune des $(m-1)$ autres:

$$A_m^2 = (m-1)\, A_m^1 = m(m-1)$$

Les arrangements 3 à 3 s'obtiennent en écrivant à la suite de chacun des arrangements 2 à 2 chacune des $(m-2)$ autres lettres:

$$A_m^3 = (m-2)\, A_m^2 = m(m-1)(m-2)$$

Le raisonnement est général: les arrangements $(n+1)$ à $(n+1)$ s'obtiendront en écrivant à la suite de chacun des arrangements n à n chacune des $(m-n)$ autres lettres:

$$A_m^{n+1} = (m-n)\, A_m^n.$$

D'où la formule générale: $A_m^{n+1} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n)$

ou: $A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$

Remarque: $A_m^n = \dfrac{m(m-1)\dots\dots 3.2.1}{(m-n)\dots\dots 3.2.1} = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Autre remarque: Les arrangements de m lettres m à m sont leurs permutations: $A_m^m = P_m = m(m-1)\dots 3.2.1 = m!$

$(n < m)$

Combinaisons de m lettres n à n : tous les assemblages qu'on peut former en prenant n lettres dans un ordre quelconque ; 2 combinaisons ne diffèrent que par leur contenu ~~non par leur ordre~~ l'ordre est indifférent.

Il s'ensuit que 2 arrangements de m lettres n à n qui ne diffèrent que par l'ordre correspondent à une contiennent les mêmes lettres et seule et même combinaison ; or tous les arrangements qui contiennent les mêmes n lettres sont les permutations de n lettres, au nombre de $n!$. Donc à chaque combinaison de m lettres n à n correspondent $n!$ arrangements de m lettres n à n. Le nombre des combinaisons est donc égal à celui des arrangements divisé par $n!$:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} \qquad C_m^m = 1 = C_m^0$$

Remarques 1° En vertu de la symétrie de la formule :

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad C_m^n = C_m^{m-n}.$$

2° Le nombre C_m^n étant un nombre entier, il est prouvé que $m(m-1)\ldots(m-n+1)$ est divisible par $n!$; autrement dit : que le produit de n nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers (1)

On retrouve ainsi, par la théorie des combinaisons, un théorème de l'Arithmétique que l'on peut démontrer directement.

(1) et même par le produit de n nombres entiers consécutifs, pourvu qu'ils soient inférieurs respectivement aux précédents.

Autre démonstration (due à Cauchy) :
Supposons formé le tableau des combinaisons de m lettres n à n, et cherchons 2 expressions du nombre de fois que chaque lettre figure dans ce tableau. Il y a : $n C_m^n$ lettres en tout ; donc la lettre a figure $\frac{n}{m} C_m^n$ fois. D'autre part si l'on supprime la lettre a dans toutes les combinaisons où elle figure, on obtient toutes les combinaisons de $(m-1)$ lettres $(n-1)$ à $(n-1)$.
Leur nombre est : C_{m-1}^{n-1}

Donc $\frac{n}{m} C_m^n = C_{m-1}^{n-1}$ $\quad C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1}$

Formule de récurrence, jusqu'à : $C_{m-n+1}^1 = m-n+1$.

Cette méthode de démonstration est applicable aux Combinaisons complètes (avec répétition) de m lettres n à n.

Soit D_m^n le nombre de ces combinaisons. La lettre a figure dans le tableau : $\frac{n}{m} D_m^n$ fois.

D'autre part, si l'on supprime 1 fois la lettre a dans chacune des combinaisons où elle figure, on obtiendra toutes les combinaisons (complètes) de m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$, dont le nombre est D_m^{n-1}. Dans ces combinaisons, la lettre a figure $\frac{n-1}{m} D_m^{n-1}$ fois ; et de plus, on l'a supprimée D_m^{n-1} fois ; donc :

$$\frac{n}{m} D_m^n = \frac{n-1}{m} D_m^{n-1} + D_m^{n-1} = \frac{m+n-1}{m} D_m^{n-1}$$

$$D_m^n = \frac{m+n-1}{n} D_m^{n-1}.$$

formule de récurrence jusqu'à : $D_m^1 = m$.

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots\dots n} = C_{m+n-1}^n$$

On peut concevoir autrement les arrangements et les combinaisons.

Soient m places données (numérotées de 1 à m) et 2 objets ou lettres a, b à y arranger. On peut mettre a dans chacune des places, puis b dans chacune des $(m-1)$ autres : on aura ainsi : $m(m-1)$ arrangements.

Si l'on a 3 objets à arranger, on ~~pourra~~ prendra chacun des arrangements précédents et l'on ~~placera~~ mettra la 3e lettre c dans chacune des $(m-2)$ places restantes : le nombre des arrangements est donc $m(m-1)(m-2)$.

En général, le nombre des arrangements de n objets dans m places $(m > n)$ sera $A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1)$

Si $m=n$, on a des permutations : $P_m = m!$

Si toutes les lettres sont semblables, c.à.d. si l'on fait abstraction de leur ordre, le nombre des arrangements distincts deviendra celui des combinaisons de m objets n à n. Et en effet, placer n objets, c'est prendre n places différentes dans l'ensemble des m places, c.à.d. former une combinaison de m objets n à n (sans considérer leur ordre)

~~Cela revient encore à dire arranger~~ C'est encore le nombre des arrangements distincts de n lettres A et de $(m-n)$ lettres B (il suffit de remplir les $(m-n)$ places vacantes par des lettres B)

— Le nombre des arrangements avec répétition ~~et~~ de m objets n à n est m^n.

— En somme, l'idée d'arrangement se ramène à l'idée plus générale de correspondance : arranger m objets

n à n, c'est en faire correspondre n aux nombres ordinaux 1, 2, 3, ... n; arranger n objets dans m places, c'est les faire correspondre à n des m nombres ordinaux 1, 2, 3, ... m. Les deux arrangements reviennent à ceci : ~~Faire correspondre m objets~~ faire correspondre ~~Combiner~~ n des m objets :

$a_1\ a_2 \dots\ a_m$

à ~~avec~~ n autres objets :

$b_1\ b_2 \dots\ b_n$

de toutes les manières possibles.

Une permutation consiste à faire correspondre m objets $a_1\ a_2 \dots a_m$ à m autres objets $b_1\ b_2 \dots b_m$. ~~de tou~~ Ainsi l'idée de ordre se ramène à l'idée de combinaison. ~~Et en effet,~~ La théorie des ~~arrangements~~ permutations n'implique aucun ordre particulier (spatial ou temporel) entre les objets, mais seulement leur distinction et leur permutabilité. Exemples : n points quelconques de l'espace, et n sphères de rayon différent, n fonctions et n personnes ; n surfaces à colorier et n couleurs, etc.

Application à l'Algèbre : Binôme de Newton :

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+l)$$

m binômes, m lettres $a, b, c, \dots l$. Le terme le plus élevé est x^m. Le coefficient de x^{m-1} est :

$$S_1 = a+b+c+\dots+l$$

Le coefficient de x^{m-2} est :

$$S_2 = \Sigma ab = ab+ac+\dots+bc+\dots$$

Celui de x^{m-3} : $S_3 = \Sigma abc = abc+abd+acd+\dots$

Enfin ~~celui de~~ le terme indépendant de x est le produit.

$$S_m = abc \ldots l.$$

S_1 est la somme des combinaisons 1 à 1,

S_2 ——————————— 2 à 2,

. . . .

S_m ——————————— m à m

des m lettres $a, b, c, \ldots l$.

Si l'on suppose $a = b = c = \ldots = l$, ~~on a~~:

$C_m^1 a$ | ~~$(x+a)^m = x^m +$~~ $S_1 = \frac{m}{1} a$,

$C_m^2 a^2$ | $S_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} a^2$,

$C_m^3 a^3$ | $S_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3$,

$C_m^n a^n$ | . . . . . $S_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n$,

$C_m^m a^m$ | $S_m = \frac{m!}{m!} a^m = a^m$.

Il vient:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \ldots$$ Terme général $\boxed{C_m^n a^n x^{m-n}}$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m$$

Le développement est symétrique en vertu de $C_m^n = C_m^{m-n}$

D'ailleurs x et a figurent symétriquement.

Triangle arithmétique de Pascal: On range les C_m^n par lignes de m et par rang de n.

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

La loi de formation du triangle est très simple : parmi les combinaisons de m lettres n à n, séparons celles qui contiennent une lettre, a, et celles qui ne la contiennent pas. Le nombre des 1res est C_{m-1}^{n-1} ; le nombre des 2es est C_{m-1}^{n} ; leur nombre total : C_m^n. Donc : $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$ (1)
Chaque nombre est la somme de celui qui est placé au-dessus et de son voisin de gauche.
On appelle ces nombres : nombres figurés.

On peut donner au tableau une forme rectangulaire :
En effet : $C_{m+n-1}^n = D_m^n$.
C'est le n^e nombre de la $(m+n-1)^e$ ligne : ou encore le m^e nombre de la n^e colonne (car à la n^e colonne il manque $(n-1)$ nombres.) Donc, si l'on fait partir toutes les colonnes de la 1e ligne, le nombre D_m^n sera à l'intersection de la m^e ligne et de la n^e colonne

	1	1	1	1	1	1 ...
	1	2	3	4	5	6 ...
(2)	1	3	6	10	15	21 ...
(2)	1	4	10	20	35	56 ...
	1	5	15	35	70	......
	1	6	21	56	......	

La symétrie du tableau devient alors manifeste — La relation :
$C_{m+n-1}^n = C_{m+n-2}^n + C_{m+n-2}^{n-1}$
devient : $D_m^n = D_{m-1}^n + D_m^{n-1}$
Chaque nombre est la somme de ceux qui le précèdent dans sa ligne et dans sa colonne.

(1) On peut vérifier directement cette relation par le calcul
(2) Les nombres de la 3e ligne sont les nombres triangulaires. Ceux de la 4e sont les nombres pyramidaux. (Piles de boulets.)

~~Ou encore~~ Par suite : Le n^e nombre d'une ligne quelconque est la somme des n premiers nombres de la suite précédente.
Et symétriquement : Le m^e nombre d'une colonne quelconque est la somme des m premiers nombres de la colonne précédente.

Le binôme de Newton n'est pas un théorème d'Algèbre ; ~~la pr~~ mais une proposition de la théorie des combinaisons. La preuve en est qu'il n'implique aucune propriété spéciale de la multiplication ; il repose sur une loi ~~combinatoire~~ purement formelle : loi distributive de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(x+\alpha)(x+a) = x^2 + ax + \alpha x + a^2.$$

Aussi s'applique-t-il à toutes les opérations qui sont distributives par rapport à une combinaison donnée.

Exemple : $d(uv) = udv + vdu$

$$d^2(uv) = ud^2v + dudv + dvdu + vdu^2$$

En général : $d^m(uv) = C_m^0\, ud^mv + C_m^1\, dud^{m-1}v + \dots + C_m^{m-1} du^{m-1} dv + C_m^m v du^m$

Formule symbolique :

$(du + dv)^m$ en convenant que $d^0 u = u$

Autre exemple : $f(x,y)$ $\quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^m f = C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial x^m} dx^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} dx^{m-1} dy + \dots + C_m^{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}} dx dy^{m-1} + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m} dy^m$$

Formule symbolique : $\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)^m$ mieux : $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m$

en convenant ~~que~~ : $\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right) \times \left(\frac{\partial^{m-n}}{\partial y^{m-n}}\right) = \frac{\partial^m f}{\partial x^n \partial y^{m-n}}$.

Ces formules reposent ~~sur~~ une seule et même loi combinatoire étrangère et supérieure à l'Algèbre et à l'Analyse.

14e Leçon

Théorie des substitutions. Etant données n lettres, il y en a $n! = 1.2.3....n$ permutations.

On appelle substitution l'opération par laquelle on passe d'une permutation à une autre (en remplaçant chaque lettre de la 1re par la lettre qui occupe le même rang dans la 2e)

Il y a $n!$ substitutions possibles de n lettres, en y comprenant la substitution identique qui consiste à conserver la même permutation.

On peut obtenir les $n!$ permutations possibles en appliquant à une permutation qcque les $n!$ substitutions.(1)

On appelle produit de 2 substitutions A, B ~~le résultat~~ la ~~qu'on obt~~ substitution qui ~~équivaut à~~ donne le même résultat que celui qu'on obtient en effectuant les substitutions A et B successivement dans leur ordre sur une ~~même~~ permutation.

On définit ainsi une opération, dite multiplication, mais qui n'est pas commutative : le produit de 2 substitutions dépend en général de l'ordre des facteurs.

Notation : la même que pour la multiplication ; mais on distingue multiplication à droite et à gauche.

Le module de la multiplication est la substitution identique ; on la représente par 1.

Puissances d'une substitution : répétition d'une même substitution. — Par convention, $S^0 = 1$.

Substitutions inverses : Si S passe de la permutation P_1 à P_2 le passage

(1) N.B : Cela n'est vrai que parce que l'ensemble des $n!$ substitutions forme un groupe. Car si S_1 est la subst. de P_1 à P_0, S_2 celle de P_2 à P_0, la subst. de P_1 à P_2 sera $S_2 : S_1$, c.à.d une subst. du groupe partant de P_0.
ou $S_2 \times S_1^{-1}$.

inverse de P_2 à P_1 est la substitution S^{-1}. En effet :

$SS^{-1} = 1$ $\qquad S^{-1} = \frac{1}{S}$.

La suite des puissances d'une substitution est périodique, car il n'y a qu'un nombre fini ($n!$) de substitutions possibles de n lettres. Si la période se compose de m substitutions distinctes $\quad S^m = 1 = S^0 = 1$

on revient à la permutation initiale. On dit que la substitution est d'ordre m. Analogie avec théorie des n[illegible]

Substitution circulaire. Étant données n lettres en ordre linéaire, une subst. circulaire consiste à remplacer chacune par la suivante (et la dernière par la 1re)

~~Puissance~~ Image : un cercle tournant de $\frac{1}{n}$ de circonf.

Puissances d'une substitution circulaire : consistent à remplacer chaque lettre par la 2e, la 3e, ... la $(n-1)$e consécutive (en recommençant à compter au commencement.)

Ou encore : ordre périodique illimité, consistant à répéter une même permutation un nombre indéfini de fois à la suite d'elle-même : abcde abcde abcde ..... (1)

La ne puissance d'une subst. circulaire est $= 1$.

Donc l'ordre d'une subst. circulaire est égal au nombre des lettres qu'~~elle~~ on permute.

~~Mais~~ Théorème : Toute substitution non circulaire est un produit de subst. circulaires portant sur des lettres différentes.

D'où : décomposition d'une substitution en facteurs circulaires ou cycles +

Une subst. circulaire de n lettres équivaut à $(n-1)$ inversions (transpositions de 2 lettres consécutives)

(1) Ne pas confondre avec l'exemple de Cournot (Correspondance § [illegible]) où l'on effectue diverses substitutions en prenant des lettres de n en n dans une succession de périodes de m lettres ($n < m$.)

Une substitution quelconque est égale à un produit d'inversions, dont le nombre est déterminé à un multiple de 2 près (= de même parité)

Les substitutions du 1er genre équivalent à un nombre pair d'inversions; du 2e genre à un nombre impair.

Application au jeu des quinze: la substitution est possible si elle est du 1er genre; impossible si elle est du 2e.

— ~~Une~~ Le produit de plusieurs substitutions est pair ou impair, suivant que le nombre des substitutions impaires est pair ou impair (Analogie avec la règle des signes en Algèbre) [De même que ~~la somme~~ une somme de plusieurs nombres est paire ou impaire, suivant qu'elle contient un nombre pair ou impair de nombres impairs]

Théorie des groupes de substitutions.

On appelle groupe fini un ensemble d'objets, en nombre fini, sur lesquels on peut effectuer une combinaison jouissant des propriétés suivantes:

1° La combinaison de 2 objets produit un autre objet bien déterminé de l'ensemble.

2° La combinaison est associative;

3° Un même objet combiné avec deux objets différents donne des résultats différents.

On voit que ~~des~~ d'un ensemble de substitutions forme ~~nt~~ un groupe, pourvu que le produit de 2 subst. de l'ensemble soit encore une subst. de l'ensemble. L'ordre du groupe est le nombre des substitutions.

Exemples. 1° L'ensemble des $n!$ substitutions possibles de n lettres forme un groupe (d'ordre $n!$)

2° Les puissances d'une même substitution circulaire forment un groupe (d'ordre n)

Si toutes les substitutions d'un groupe H font partie d'un groupe G, le groupe H est dit *sous-groupe* de G : et son ordre est un diviseur de l'ordre de G.

Corollaire : L'ordre d'un groupe qcq de n lettres est un diviseur de $n!$: car il fait partie du groupe de ~~$n!$~~ ~~lettres~~ substitutions possibles, au nombre de $n!$.

On appelle *indice* d'un groupe le quotient de $n!$ par l'ordre de ce groupe.

Groupe symétrique : groupe des $n!$ substitutions possibles.

Groupe alterné : groupe des $\frac{n!}{2}$ substitutions paires.

~~Problème~~ Théorème de M. Bertrand. L'indice d'un groupe de n lettres ne peut être à la fois supérieur à 2 et inférieur à n, si $n \gtrless 4$ (démontré par Serret)

Si l'indice d'un groupe est égal à n, ce groupe se compose des $(n-1)!$ substitutions de $(n-1)$ lettres (sauf dans le cas où $n = 6$.)

Car il existe un groupe d'indice 6 qui comprend 120 substitutions de 6 lettres, mais qui n'est pas formé par les 120 substitutions de 5 lettres ~~(groupe de l'icosaèdre)~~ (1)

Tout groupe d'ordre premier p se compose des p puissances d'une substitution circulaire d'ordre p.

Une substitution d'ordre premier p ne contient que des cycles de p lettres : car l'ordre de une substitution qui contient des cycles de h, k, l.. lettres est le ppcm des nombres $h, k, l, \ldots$

(1) Le groupe de l'icosaèdre est le groupe alterné de 5 lettres ; son ordre est donc : $\frac{1.2.3.4.5}{2} = 60$. C'est le groupe non cyclique le plus simple

On appelle *groupe cyclique* un groupe formé par les puissances d'une substitution circulaire, ou un produit de plusieurs groupes de cette espèce.

Un groupe cyclique d'ordre non premier n est le produit de groupes cycliques ayant pour ordres respectifs les facteurs premiers de n.

Un groupe est dit *résoluble* quand il est le produit de groupes cycliques : parce que l'équation algébrique correspondante est alors résoluble.

— En quoi consiste la correspondance entre les groupes et les équations ? ou les fonctions algébriques ?

Lorsqu'une fonction de n ~~variables~~ lettres $x_1 x_2 \ldots x_n$ reste invariable pour toutes les substitutions d'un groupe G, elle est un *invariant* de ce groupe : *caractéristique* si elle varie pour toute autre substitution des n lettres.

Exemples : les fonctions symétriques élémentaires de n lettres $S_1 S_2 \ldots S_n$ sont des invariants du groupe symétrique d'ordre $n!$

La fonction : $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_{n-1} - x_n)$ est un invariant caractéristique du groupe *alterné* : en effet, elle change de signe à chaque inversion de 2 lettres ; donc elle reste invariable par les substitutions paires.

Théorèmes : Toute fonction de n lettres est un invariant caractéristique d'un groupe de substit. de ces lettres.

Réciproquement, tout groupe de substitutions possède des invariants caractéristiques, et l'on peut en former une infinité.

Représentation analytique des substitutions.

Si l'on fait porter les substitutions sur les indices 1, 2, 3 ... n, ~~chaque~~ une substitution fera correspondre à chacun de ces nombres un autre nombre, c.à.d. définira une fonction de ces nombres.

Exemple: Une substitution circulaire sera représentée par:

$$f(x) = x+1$$

La 2e puissance par: $f(x) = x+2$,

La ke puissance par: $f(x) = x+k$,

La $(n-1)$e puissance par: $f(x) = x+n-1$

Seulement, comme les indices ~~résultants~~ ne doivent pas dépasser n, on devra retrancher n au résultat, chaque fois qu'il dépassera n; ce qui revient à prendre un nombre congru [mod. n] au nombre indiqué.

D'une manière générale, une fonction quelconque ~~des~~ définie pour les n premiers nombres entiers pourra représenter une substitution, pourvu qu'on la ramène ~~à~~ dans les n prem. entiers au moyen de ~~par~~ la division par n: cela revient à considérer comme égaux les nombres congrus [mod. n].

Relation entre la théorie des nombres et celle de l'ordre.

Les congruences [mod. n] ont pour effet de réduire la suite ~~linéaire~~ naturelle illimitée des nombres entiers à une suite périodique: 1, 2, 3 ... n, 1, 2, 3, ... n, 1, 2, 3 ...

et par ~~suit~~ conséquent, de transformer un ordre linéaire en un ordre circulaire fermé. (car de p premier)

— Cas particulier: Une substitution linéaire ~~est représentée~~ par $x \mid ax+b$, en prenant $ax+b$ [mod. p] c.à.d. en réduisant $ax+b$ au ~~son~~ reste de la division par p

4e.

Cela posé, Galois a ~~démontré~~ trouvé les théorèmes :
Un groupe qui ne contient que des substitutions de degré premier linéaires est résoluble (décomposable en produit de groupes cycliques)

Et réciproquement, un groupe résoluble ne renferme que des substitutions linéaires.

+ – Maintenant, comme une équation ~~irréductible de degré premier~~ est résoluble, si son groupe l'est :
~~La condition~~ pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble, il faut et il suffit que son groupe ne contienne que des substitutions linéaires (dans ce cas, toutes les racines sont exprimables en fonction rationnelle de deux quelconques d'entre elles)
En somme, le groupe d'une équation spéciale (c.à.d. à coefficients numériques) représente le degré de symétrie qu'offrent ses racines.
Le groupe de l'équation générale (à coeff. littéraux) est le groupe symétrique car rien n'y distingue les racines, les coefficients étant des fonctions symétriques des racines.
On démontre que l'équation générale de degré > 4 n'est pas résoluble (parce que le groupe symétrique n'est pas résoluble ~~pour~~ dès que n > 4.)
Le problème général de la résolution des équations ~~revient à leur réduction à des équations normales qui~~

+ On appelle groupe d'une équation le groupe qui laisse invariables les relations rationnelles entre les racines de cette équation. Il est déterminé par le résolvant de l'équation.

~~déterminent la irrationalité caractéristique~~ se ramène en somme à la réduction de leurs groupes. La question de la résolubilité par radicaux n'est plus qu'un cas particulier : celui où l'équation se ramène à des équations binômes, et son groupe à des groupes cycliques(1).

Ainsi le parallélisme est complet entre le problème de la résolu~~bilité des radicaux~~tion des équations et celui de la réduction des groupes correspondants. Cette réduction s'obtient en adjoignant à l'équation une quantité définie par une équation auxiliaire (c. à d. en étendant le domaine de rationalité, ~~de manière~~ où l'on doit trouver les racines), de telle sorte que le polynôme auparavant irréductible devienne réductible [la réductibilité étant définie par rapport à un domaine de rationalité donné].

Cette relation de la théorie de l'Ordre avec l'Algèbre se comprend bien dans la théorie formaliste (voir Drach). En effet, si les racines ne sont définies que par l'équation même qu'elles sont censées vérifier, elles seront indiscernables en raison du degré de symétrie de l'équation elle-même, et la résolution de cette équation consistera à diminuer progressivement cette indétermination en réduisant le groupe de l'équation par l'adjonction de quantités auxiliaires (en partic. des radicaux.) Voir dans Galois comment la résolution de l'équation du 4e degré se traduit pas à pas par la réduction de son groupe, chaque extraction de racine carrée divisant l'ordre du groupe par 2 ; de racine cubique, par 3 — (Œuvres p. 45) Résoudre une équation c'est réduire son groupe à la substitution identique (p. 42

(1) Cf Klein, Conférence IX. (2) V. Galois, p. 34-35.

15e leçon

A la théorie de l'ordre et des combinaisons se rattache la théorie des probabilités : en effet, les probabilités d'événements complexes se ~~ramènent~~ calculent en ramenant ces à des combinaisons d'événements simples dont on (événements) connaît les probabilités.

Les probabilités simples sont connues, non par le calcul, mais par la simple énumération des chances. C'est donc une question de Arithmétique élémentaire.

On appelle chances divers événements ou cas qui peuvent se présenter indifféremment : on suppose qu'il n'en peut arriver qu'un (à la fois) et que tous sont également possibles. — L'égalité des chances, et leur mutuelle exclusion, sont les 2 hypothèses fondamentales de la théorie du hasard. +

Remarque : Le hasard ou la chance n'implique nullement l'absence de cause, mais simplement l'ignorance des causes, ou l'indifférence (symétrie) des causes.

Exemple : les 6 faces d'un cube symétrique.

Parmi les chances possibles, on en distingue qui sont favorables (toutes) à tel événement attendu (parié, par ex.)

Définition de la probabilité : La probabilité de cet événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles.

La probabilité est donc essentiellement une fraction comprise entre 0 et 1. Si tous les cas sont favorables

---

\+ Les chances constituent donc les éléments simples les unités primordiales de la théorie des probabilités.

la probabilité est 1 : c'est la certitude.

La probabilité étant un rapport, quand le nombre des cas est très grand, on a intérêt à calculer le rapport sans calculer les nombres qui en sont les termes : les procédés techniques pour atteindre ce but constituent les principales méthodes du Calcul des probabilités. Ainsi se pose le problème de l'évaluation approximative de formules pour le cas des grands nombres (par ex. de la factorielle $n!$ pour n très grand), problème d'Arithmétique pure qui met en jeu néanmoins toutes les ressources du Calcul intégral, parce qu'il y a ~~cat~~ avantage à substituer une sommation continue à une sommation d'éléments discontinus très nombreux, par approximation.

I. Si un événement dépend de divers cas inégalement probables, sa probabilité totale est la somme des probabilités des cas favorables à l'événement (On suppose que dans chaque cas favorable l'événement arrive nécessairement).

En effet, soient $\frac{n_1}{N}$, $\frac{n_2}{N}$, $\frac{n_3}{N}$ les probabilités des cas favorables (ou causes de l'événement). Cela signifie que sur N cas possibles en tout, il y en a n_1 favorables à la 1e cause, n_2 à la 2e, n_3 à la 3e. Comme ces 3 causes entraînent nécessairement l'événement désiré, le nombre des cas favorables à celui-ci est : $n_1 + n_2 + n_3$, et sa probabilité :

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N}.$$

Remarque. On appelle cause toute hypothèse favorable à l'événement désiré ; ~~cette~~ c'est une circonstance ~~ou~~ une condition ou un antécédent nécessaire à l'arrivée de cet événement. Exemple : urne contenant n_1 boules blanches, n_2 rouges, n_3 noires, et en tout $N > n_1 + n_2 + n_3$. On gagne si l'on tire une boule blanche, rouge ou ... Le tirage d'une boule ~~bk~~ blanche est une cause de gain.

<u>Probabilité composée</u>. On appelle événement composé un événement qui consiste dans la réunion (fortuite) de plusieurs événements (simultanés ou successifs) indépendants les uns des autres.

<u>Lemme</u>: Si l'on combine ~~et~~ m objets à n objets, chacun à chacun, le nombre des combinaisons est mn.

<u>Remarque</u>: Cela permet de démontrer la loi commutative de la multiplication des nombres entiers (Cournot).

II. Soient k événements simples indépendants; le nombre de tous les cas possibles N est le produit $m_1 m_2 \dots m_k$ des nombres des cas possibles pour chaque événement. De même, le nombre des cas favorables est le produit $n_1 n_2 \dots n_k$ des nombres des cas favorables. La probabilité de l'événement composé est donc:

$$\frac{n_1 n_2 \dots n_k}{m_1 m_2 \dots m_k} = \frac{n_1}{m_1} \times \frac{n_2}{m_2} \times \dots \times \frac{n_k}{m_k} \quad \text{(cqfd.)}$$

Exemple: k urnes contenant resp. $m_1 m_2 \dots m_k$ boules et $n_1, n_2 \dots n_k$ boules blanches. Quelle est la probabilité de tirer k boules blanches?

<u>Probabilité relative</u>. Si parmi les N cas possibles on distingue m cas spéciaux, parmi lesquels se trouvent ~~des~~ n cas favorables à l'événement, la probabilité <u>relative</u> de l'événement est le rapport $\frac{n}{m}$.

Les m cas considérés constituent une cause probable de l'événement; la probabilité de cette cause est $\frac{m}{N}$, et la probabilité de l'événement relative à cette cause est $\frac{n}{m}$. (Exemple des boules blanches, rouges et noires: la probabilité de gagner avec une boule blanche plutôt qu'avec une autre est $\frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3}$)



On peut dire que la probabilité relative à une cause est la probabilité absolue de l'événement quand on sait que la cause est arrivée.

III. Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité absolue de l'événement composé des deux est le produit de la probabilité absolue du 1er par la probabilité du 2e relative au 1er.

En effet, le 1er est cause du 2e : donc la probabilité de l'événement composé est la probabilité du 2e événement

$$\frac{n}{N} = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{N}$$

Exemple : probabilité de gagner (et avec une boule blanche :

$$\frac{n_1}{N} = \frac{n_1}{n_1+n_2+n_3} \times \frac{n_1+n_2+n_3}{N}$$

Remarque. Il n'est pas besoin que les 2 événements soient successifs ni même séparables réellement ; il suffit que le 1er soit indépendant du 2e, et que le 2e dépende du 1er.

IV. Si un événement peut dépendre de plusieurs causes (ou hypothèses) qui s'excluent mutuellement, sa probabilité est la somme des probabilités composées correspondant à chaque cause ou hypothèse.

Cela résulte du 1er et du 3e principes. Soient m_1 m_2 m_3 les nombres de cas favorables resp. aux 3 causes possibles ; n_1 n_2 n_3 les nombres de cas favorables à l'événement dans chacune des 3 hypothèses ($n_1 < m_1$, $n_2 < m_2$, $n_3 < m_3$). La probabilité de l'événement est

$$\frac{n_1+n_2+n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = \frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{m_1}{N} + \frac{n_2}{m_2}\cdot\frac{m_2}{N} + \frac{n_3}{m_3}\cdot\frac{m_3}{N}$$

ou encore : $P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$.

$p_1 p_2 p_3$ probabilités des causes ; $q_1 q_2 q_3$ prob. relatives à chaque

Théorèmes inverses de III et de IV :

V. Si l'on connaît d'avance la probabilité absolue de l'événement composé et celle du 1er événement (qu'on suppose déjà arrivé) le quotient de la 1e par la 2e sera la probabilité du 2e événement (encore attendu)

VI : Si un événement ~~arrivé~~ E peut avoir plusieurs causes, la probabilité de l'existence de une de ces causes est le quotient de la probabilité relative à cette cause par la somme des probabilités relatives à toutes les causes.

~~Il est entendu que~~ si la probabilité a priori des diverses causes est inégale, on doit multiplier ~~les~~ la probabilité relative à chaque cause par la probabilité propre de cette cause.

Considérons l'événement composé : savoir, que l'événement E ~~est arrivé~~ ; et qu'il est dû à la cause C_i $(C_1 C_2 \dots C_K)$

On peut évaluer sa probabilité de deux manières :

1° Il faut que la cause C_i ait agi (probabilité p_i) et ~~que~~ qu'elle ait produit l'événement E (probabilité q_i)

2° Il faut que l'événement E soit arrivé (probabilité : $p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_K q_K$) et qu'il soit dû à la cause C_i (probabilité inconnue x_i) : Egalons ces 2 formes d'une même probabilité :

$$p_i q_i = (p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_K q_K)\, x_i$$

d'où :

$$x_i = \frac{p_i q_i}{p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_K q_K}$$

On peut dire simplement :

Le nombre de tous les cas favorables à l'événement E est $N(p_1q_1 + \dots + p_K q_K)$; celui des cas favorables à l'hypothèse

que la cause C_i a ~~agi~~ produit E_0 est Np_iq_i. Donc, etc.

Exemple. Une urne contient N boules ~~blanches et noires~~, numérotées 1, 2, 3, ... k. On tire une boule blanche : quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée i ?
Soient m_i le nombre des boules numérotées i, et n_i le nombre des blanches du même numéro : le nombre total des boules blanches est : $n_1 + n_2 + \dots + n_k$
et la probabilité demandée est : $\dfrac{n_i}{n_1+n_2+\dots+n_k} = x_i$

Or : $\dfrac{n_i}{m_i} = p_i$, $\dfrac{m_i}{N} = q_i$:

$n_i = m_ip_i = Np_iq_i$: $x_i = \dfrac{p_iq_i}{p_1q_1+p_2q_2+\dots+p_kq_k}$

Les théorèmes V et VI servent de principes à la recherche de la probabilité des causes, qui constitue le problème inverse des probabilités : Etant données telles causes, déduire de leurs probabilités la probabilité de tel effet ; Etant donné tel effet, déduire la probabilité de telle cause. Le problème inverse est (comme toujours) beaucoup plus difficile que le problème direct.

— Espérance mathématique. Si l'on évalue l'avantage que l'on ~~espère~~ attend d'une épreuve aléatoire, on appelle espérance math. le produit de cette valeur par la probabilité de l'obtenir. Il ne faut pas (malgré l'égalité arithmétique) l'assimiler à la certitude d'une ~~somme~~ valeur égale.

Si n joueurs ont chances égales de gagner la somme S, et s'ils préfèrent se la partager que de courir les risques du jeu, ils devront en recevoir chacun $\frac{1}{n}$: soit $\frac{S}{n} = Sp$.
Tel est le sens de leur espérance mathématique. C'est l'équivalent des chances de gain qu'on a, si l'on veut liquider la partie (Origine historique du calcul des probabilités : règle des partis

Pour qu'un jeu (de hasard) soit équitable, il faut que les joueurs aient chances de gain, c.à.d. que leurs espérances maths. (d'égales) soient égales. Si le joueur A a la probabilité p de gagner l'enjeu b de l'adversaire, et si B a la prob. q de gagner l'enjeu a, leurs espérances seront égales si :

$$pb = qa.$$

C'est la règle des paris : les mises doit (vent) être en raison inverse de la probabilité de gagner.

Si l'on attend divers avantages de plusieurs événements indépendants, l'espérance maths. est la somme des produits de la probabilité de chaque événement par l'avantage qui doit en résulter.

Si de certains événements on espère un gain, et de certains autres une perte, ceux-ci devront être comptés négativement dans l'espérance maths ; et si la somme est négative, elle représentera une crainte mathématique (c.à.d. une probabilité de perte.)

Dans un jeu équitable, l'espérance (totale) de chaque joueur est nulle : $pb - qa = 0.$

Dans une loterie, l'espérance est toujours négative : car s'il y a 1 million de billets, et si le gros lot est de 100.000 fr. on a 1 chance sur 1.000.000 de gagner 100.000 fr. : l'espérance est donc : $\frac{100.000}{1000.000} = \frac{1}{10}$ de franc. Le billet vaut 10 centimes.

Dans tous les jeux de hasard, le banquier se réserve une chance qui rend le jeu inégal, et défavorable aux pontes. Comme la banque est toujours sûre de gagner, l'espérance maths. des joueurs est nécessairement négative.

Paradoxe de Saint-Pétersbourg. Deux joueurs, A et B, jouent à pile ou face. A donne à B 2 fr. s'il amène face au 1er coup; 4 fr s'il amène face au 2e coup seulement; 8 si au 3e, etc. 2^n au n^e. Quelle est l'espérance mathé de B ?
La probabilité d'amener face au 1er, au 2e, ... au n^e coup seulement est:
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^n}.$$
Le gain correspondant est:
$$2, 4, 8, \dots 2^n \text{ francs.}$$
L'espérance est: $1 + 1 + 1 + \dots + 2 + \dots$ francs c.à.d. un nombre infini. Pour que le jeu soit égal, il faut que B risque une somme infinie; en gén. il faut qu'il risque n francs pour n coups.
Pour résoudre cette difficulté, Daniel Bernoulli a inventé l'Espérance morale.
Il faut d'abord définir l'avantage moral: on admet que l'avantage moral qui résulte d'un gain est en raison inv. de la fortune qu'on possède. D'où cette définition:
La valeur relative d'une somme infiniment petite est le ~~quot~~ rapport de sa valeur absolue à la fortune de la personne qui la gagne ou la perd.
De cette définition résulte l'évaluation de l'avantage moral et de la fortune morale.
L'espérance morale est le produit de l'avantage moral par la probabilité qu'on a de l'obtenir.
Il en résulte que, même à jeu égal, la perte est relativement plus grande que le gain. Si un joueur qui possède 100f en risque 50 à pile ou face, sa fortune risque de diminuer dans le rapport de 2 à 1, et d'augmenter dans le rapport de 2 à

Le calcul montre que sa fortune morale se réduit à 87°.
En général, tous les risques diminuent la fortune morale.
Il vaut mieux exposer sa fortune par parties à des risques indépendants, que de l'exposer tout entière à un seul risque.
Plus on divise ainsi sa fortune entre divers risques, plus l'avantage moral se rapproche de l'avantage math. il coïncide avec lui lorsque la division est supposée infinie.

— Application au paradoxe de St Pétersbourg:
Si B ne veut pas diminuer sa fortune morale, et si sa fortune physique est de 107,89, il ne devra risquer que 7,89; si elle est de 208,78, il risquera 8,78.

Inversement, la fortune morale peut s'accroître par les assurances: l'assuré peut trouver un avantage moral dans un contrat où l'assureur trouve en même temps son bénéfice (avantage mathématique).
A plus forte raison les assurances mutuelles augmentent la fortune morale des participants.
En résumé, il y a un désavantage moral attaché au risque ou à l'incertitude. La fortune morale ~~diminue~~ décroît quand on augmente les risques et s'accroît quand on les diminue.

De la répétition des événements.

Un événement répété est un événement composé: on lui appliquera la règle générale.
Considérons d'abord m urnes, contenant respectiv! $a_1 a_2 \ldots a_m$ boules blanches, et $b_1 b_2 \ldots b_m$ boules noires.
On tire une boule de chaque urne; quelle est la probabilité

de tirer n boules ~~blanches~~ (et $m-n$ boules noires) ?

Le nombre des cas possibles pour chaque urne est $(a+b)$; celui de tous les cas possibles résultant de leurs combinaisons est $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots\ldots(a_m+b_m)$.

Le nombre des cas favorables est celui des combinaisons qui ~~amènent~~ contiennent n boules blanches et $m-n$ noires. C'est donc, dans le produit précédent, la somme des termes qui contiennent n facteurs a et $(m-n)$ facteurs b. On sait que le nombre de ces termes est : $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

Supposons maintenant que toutes les urnes ont la même composition :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a,$$
$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = b.$$

Le nombre des cas possibles devient : $(a+b)^m$.

Celui des cas favorables : $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}\,a^n b^{m-n}$

La probabilité demandée est donc le quotient : $P = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^n\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{m-n}$

Or : $\dfrac{a}{a+b} = p$ probabilité du tirage d'une boule blanche

$\dfrac{b}{a+b} = q$ ——————————— noire.

Donc : $P = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}\,p^n q^{m-n}$

terme ~~$(n+1)^e$~~ ~~général~~ général du développement du binôme : $(p+q)^m =$

On vérifie ainsi que la somme des probabilités de tous les cas possibles est $= 1$

Au lieu de m urnes de même composition dans lesquelles on tire respectivt et simultanément m boules, on peut considérer une seule urne dans laquelle on fait m tirages successifs, en remettant chaque fois la boule sortie (et en agitant pour les mêler) P est donc la probabilité qu'il a d'amener n fois une boule blanche en m tirages.

Quelle est la combinaison de tirages la plus probable ?

Le rapport du terme général : $\frac{m!}{n!(m-n)!} p^n q^{m-n}$

au terme précédent : $\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} p^{n-1} q^{m-n+1}$

est : $\frac{m-n+1}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{(m-n+1)p}{n(1-p)}$

Cherchons s'il est supérieur ou inférieur à 1 :

$(m-n+1)p > n(1-p)$ $\quad mp - np + p > n - np$

$$(m+1)p > n$$

Tant que n est plus petit que $(m+1)p$, le terme général croît ; quand n est plus grand que $(m+1)p$, il décroît. Le maximum est donc atteint quand

$$n = (m+1)p$$

ou, si $(m+1)p$ n'est pas un nombre entier, quand n est égal au plus grand entier contenu dans $(m+1)p$: car alors :

$$n < (m+1)p < n+1$$

ce qui montre que le terme correspondant est à la fois plus grand que le précédent et que le suivant.

Si pm est entier, ce sera le plus grand entier contenu dans $(m+1)p$; alors : $n = pm$, $\quad m-n = m(1-p) = qm$.

On voit que la combinaison la plus probable correspond au cas où :

$$\frac{n}{m-n} = \frac{p}{q},$$

c.à.d. où les nombres de boules tirées sont proportionnels aux probabilités de les tirer, c.à.d. aux nombres des boules contenues dans l'urne. — Cette conclusion s'applique au cas de 2 événements A et B, exclusifs l'un de l'autre et contradictoires, de telle sorte que l'un d'eux arrive

nécessairement à chaque épreuve aléatoire; leurs probabilités respectives étant p et q. $(p+q)=1$

Ainsi la formule du binôme représente la loi de probabilité des diverses répartitions possibles; parce qu'elle ~~est~~ contient la loi générale des combinaisons de m objets n à n, et que la fréquence et la probabilité de chaque répartition est proportionnelle au nombre des combinaisons correspondantes.

Représentation graphique: On divise une droite en m segments aux $(m+1)$ points de division on élève des perp. prop. aux termes correspondants du développement du binôme $(p+q)^m$.

Quand m est très grand, on peut relier les sommets de ces perp. par une courbe continue. Analytiquement, cette continuité fictive se traduit par une certaine fonction qui exprime l'ordonnée par rapport à l'abscisse. (e^{-t^2})

L'aire comprise entre 2 ordonnées représente la probabilité d'un événement compris entre les 2 abscisses correspondantes. On appelle écart la différence entre la valeur considérée et la valeur qui correspond au maximum. La valeur la plus probable est évidemment cette valeur maximum; néanmoins, si m croît indéfiniment, ~~la p~~ le nombre de toutes les répartitions possibles augmente, et par suite la probabilité de chacune décroît indéfiniment, d'autant plus vite que l'écart est plus grand. De sorte que la probabilité de l'écart nul tend vers zéro. De plus, la probabilité d'un écart absolu (dépassant une valeur donnée) devient ~~Est~~ de plus en plus grande (1)

En revanche, la probabilité que l'écart relatif reste inférieur à une limite donnée devient aussi de plus en plus grande, c.à.d. que le rapport du nombre des ~~événements~~ écarts (contenus dans certaines limites) au nombre total des épreuves tend vers 1.

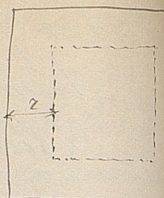
---

(1) D'où l'on conclut la ruine inévitable des joueurs: en effet, fortune de chacun d'eux constitue une limite supérieure fixe de l'écart et la probabilité qu'elle sera dépassée croît de plus en plus.

Ces paradoxes s'expliquent par la loi de croissance de l'écart moyen et de l'écart probable.
L'écart moyen est la moyenne de tous les écarts, pris en valeur absolue.
L'écart probable est l'écart tel qu'il y ait autant de chances pour le dépasser que pour rester au-dessous.
Ce n'est pas l'écart le plus probable, qui est l'écart 0 ; c'est l'écart dont l'ordonnée partage en deux ~~moitiés~~ parties égales la moitié de l'aire de la courbe figurative, prise d'un côté de l'ordonnée maxima. Il serait mieux appelé l'écart médian (Cournot.)
Ces deux écarts, dont le rapport est constant, et qui caractérisent la vitesse avec laquelle décroît la probabilité des écarts, sont proportionnels à $\sqrt{m}$.
Ils croissent donc indéfiniment avec le nombre des épreuves, mais leur rapport à ce même nombre décroît indéfiniment (étant proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{m}}$.)

— On voit qu'il y a avantage à introduire dans la variation des probabilités une continuité fictive alors qu'elles correspondent à des événements discontinus mais très nombreux.(1) A plus forte raison quand les probabilités sont susceptibles de variation continue comme celles des événements d'ordre géométrique.
Exemple : jeu du franc-carreau. On jette au hasard une pièce de monnaie, de rayon r, sur un plan divisé en carrés de côté a. On gagne si la pièce tombe à l'intérieur d'un carré, on perd si elle touche ou coupe un des côtés.

(1) Les nombres dont le rapport constitue la probabilité peuvent devenir infinis, pourvu que leur rapport reste fini et déterminé.

Quelle est la probabilité qu'on a de gagner ? 

Tous les carreaux étant ~~semblables~~ pareils, on peut n'en considérer qu'un. Traçons à l'intérieur un carré à la distance r de tous les côtés. On gagne si le centre de la pièce tombe dans ce carré ; on perd s'il tombe dans la bande comprise entre les 2 carrés. On admet ~~que le centre~~ la probabilité qu'un point a ~~des chances~~ de tomber dans une aire est proportionnelle à cette aire. La probabilité de gagner est donc ici : $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$

On voit que la probabilité ne peut plus se définir comme un rapport de nombres (nombre de points d'une aire : absurde) mais comme un rapport de grandeurs : c'est le rapport de l'étendue des chances favorables à l'étendue totale des chances (Cournot) Citer le § 15 :

« C'est ainsi que le calcul de la probabilité mathématique qui ne se présentait d'abord que comme une branche de la syntactique ou de la théorie des combinaisons, devient plus vaste que la syntactique même, en ce sens qu'il s'applique à des cas où il n'y aurait lieu, ni de former les combinaisons une à une, ni d'en calculer le nombre, parce que ce nombre est illimité. »

— Le Calcul des probabilités est instructif, parce qu'il montre à quelles conditions une science peut être mathématique. ~~Rien~~ La probabilité, en tant que sentiment interne ou croyance, est un phénomène psychique, subjectif, qui échappe à toute mesure. Mais on en définit (arbitrairement) l'équivalent mathématique et on définit les combinaisons des probabilités de telle sorte qu'elles ~~se~~ s'expriment par des opérations arithmétiques ; comme ~~c'est ainsi~~ qu'elles deviennent objet de science et de calcul

16e Leçon

Science des grandeurs. Qu'est-ce qu'une grandeur ? Définition classique : Toute chose susceptible d'augmentation et de diminution. Cercle vicieux : d'abord parce que l'augmentation et la diminution impliquent l'idée de grandeur ; ensuite, parce qu'elles impliquent l'idée de variation. Or toute variation suppose l'identité d'une chose qui passe par divers états de grandeur, constants : ~~la~~ toute variation est relative à la constance. Avant de parler ~~de~~ d'une grandeur~~s~~ variable~~s~~, il faut connaître les grandeurs constantes auxquelles la première est censée devenir égale.

Autre définition : Toute chose qui peut être dite égale ou inégale à une autre. Encore cercle vicieux car l'idée d'égalité suppose comme celle de grandeur (toute relation implique la connaissance de ses termes.) Du reste, égalité signifie au fond identité de grandeur ; pour savoir que deux objets ont la même grandeur, il faut évidemment d'abord ~~la~~ concevoir leur grandeur.

– Néanmoins, cette définition suffit à caractériser l'idée indéfinissable de grandeur, en indiquant la relation essentielle qui existe entre deux grandeurs de même espèce, et sous quel rapport elles peuvent être comparées. En outre, elle sert à définir l'espèce de grandeurs : deux grandeurs sont de même espèce si l'on peut les comparer, c.à.d. dire qu'elles sont égales ou inégales. Pour que l'on puisse comparer 2 grandeurs, il faut qu'elles soient identiques qualitativement ~~donc~~ ~~ind~~ et par suite qu'elles relèvent du même concept.

Le concept général de chaque espèce de grandeur est souvent considéré comme une grandeur (générique ou spécifique) dont toutes les grandeurs particulières seraient des états. La totalité des états de grandeur d'une certaine espèce constitue un ensemble de grandeurs. C'est un tel ensemble que nous allons considérer maintenant.

Les principes de la science des grandeurs sont les axiomes qui expriment les propriétés essentielles de la grandeur en général, et les relations fondamentales entre des grandeurs. Ces axiomes servent à caractériser l'idée de grandeur et ~~en remplaçant~~ leur tiennent lieu de définition.

1er Axiome: Deux grandeurs de même espèce sont égales ou inégales (C'est la prétendue définition de la grandeur). Cet axiome affirme la disjonction complète entre les 2 cas. Il est fondé sur le principe d'identité (ou du tiers-exclu).

2e Axiome: Si $A = B$, on a: $B = A$.

Cet axiome affirme la réversibilité de la relation d'égalité. En effet, si l'égalité est l'identité de deux grandeurs, la 2e est identique à la 1e comme la 1e à la 2e. Seulement, il se peut qu'en fait la relation empirique par laquelle on définit ou vérifie l'égalité d'une espèce de grandeurs ne soit pas symétrique, auquel cas l'axiome s'applique. Il faut qu'on puisse renverser l'ordre des termes de la relation.

— On en déduit: Si $A \gtrless B$, on a aussi: $B \lessgtr A$.

3e Axiome: Si $A = B$, $B = C$, on a: $A = C$.

Deux grandeurs égales à une même 3e sont égales entre elles. Cela résulte encore de l'identité qui est le fondement de la relation d'égalité.

Ces deux derniers axiomes peuvent se déduire d'un seul axiome fondamental :

Deux grandeurs égales peuvent se remplacer l'une l'autre dans toutes leurs relations (de grandeur, bien entendu)

Cet axiome peut servir de définition à l'égalité :

Deux grandeurs sont égales quand ... etc. +

Cet axiome est le principe d'une foule d'axiomes secondaires,

~~par ex. : Si $A = A'$, $B = B'$, on a : $A + B = A' + B'$. (Le signe + peut être ici le signe d'une combinaison univoque quelc. : au fond, c'est la définition de l'opération univoque.)~~

Exemple : Si $A = B$, $B > C$, on a : $A > C$.

ou encore : si $A > B$, $B = C$ — $A > C$.

— Maintenant, supposons qu'on ait défini une certaine combinaison de deux grandeurs de même espèce, c.à.d. une opération par laquelle, étant données 2 grandeurs, on peut trouver une 3e grandeur de la même espèce ; on appellera celle-ci somme et l'opération elle-même addition, si elle vérifie les axiomes suivants :

I. L'addition est une opération uniforme, c.à.d. donne un résultat unique et bien déterminé :
si $A = A'$, $B = B'$, on a : $A + B = A' + B'$ (Euclide II.)

II. Loi commutative : $A + B = B + A$.

III. Loi associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

De ces 3 axiomes il résulte que l'addition des grandeurs a exactement les mêmes propriétés que celle des nombres : dans une somme de grandeurs on peut intervertir leur ordre et en remplacer ~~un certain nombre~~ plusieurs par leur somme effectuée.

— Montrer comment les 2 axiomes de l'égalité s'en déduisent.

Axiome de la différence. Si deux grandeurs sont inég[ales] l'une d'elles est la somme de l'autre et d'une 3e grand[eur] qu'on nomme leur différence.

Si $A = B + C$ et si l'on n'a pas : $B = A + C'$,

on dit alors que $\left\{ \begin{array}{l} A > B. \\ B < A. \end{array} \right.$ Cela détermine le sens de l'inégalité. (Grandeurs absolues)

Si au contraire : $A = B + C$, $B = A + C'$,

A et B sont inégales, sans que l'une puisse être dite plus grande ou plus petite que l'autre (n. imaginaires ou du moins, il faudra définir autrement le sens de l'inégalité (p. ex. dans les n. qualifiés : différence positive)

Axiome réciproque : $A + B \gtrless A$ $(A + B > A)$

dans le cas particulier où ~~l'inégalité~~ la soustraction n'a qu'un sens

De ces 2 axiomes on déduit les théorèmes suivants :

Si deux grandeurs absolues sont inégales, leur différence est uniq[ue]

Ce théorème énonce que la soustraction est uniforme.

Si $A = B + C$ on écrit : $C = A - B$.

Si $A = A'$, $B = B'$, on a : $A - B = A' - B'$ (Eucl. I)

Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs ~~inég~~ égales, les sommes sont inégales : ~~A=B~~,

Si $A > A'$, $B \geqq B'$ on a : $A + B > A' + B'$ (Eucl. I)

Si à des grandeurs inégales on retranche des grandeurs ~~inég~~ égales les restes sont inégaux.

Si $A > A'$, $B = B'$, on a : $A - B > A' - B'$ (Eucl. I)

Remarque. Cet axiome remplace l'axiome VIII d'Euc[lide] « Le tout est plus grand que la partie » lequel est vrai ou faux suivant l'espèce de grandeurs que l'on considère (ou même n'a pas de sens)

Dans un ensemble de grandeurs relatives, on a à la fois par hypothèse :

$$A = B + C \qquad B = A + C'$$

D'où : $B = (B+C) + C' = B + (C+C')$

Cela veut dire que la grandeur $(C+C')$ a un effet nul dans l'addition, ou est le module de l'addition : nous la représenterons par 0, et nous la définirons par l'égalité : $A + 0 = A$

ou celle-ci (équivalente) : $0 = A - A$

Ainsi l'on a : $C + C' = 0$,

c.à.d. $(A-B) + (B-A) = 0$.

Ces deux grandeurs, dont la somme est nulle, seront dites symétriques par définition +. On aura

$$C' = 0 - C$$

Ainsi la symétrique d'une grandeur s'obtient en retranchant cette grandeur de la grandeur nulle.

D'autre part : $C + C' = C - C = 0$.

On est ainsi amené à identifier C' ou $+C'$ avec $-C$, c.à.d. à désigner le sym. de C par le symbole soustractif $-C$.

Dans un ensemble de grandeurs absolues, il n'y a pas de grandeurs symétriques ; en effet $A+B > A$ et $> B$; donc $A = A + 0 > 0$. à fortiori : $A + B > 0$ et non $= 0$.

Pour construire un ensemble de grandeurs relatives, il suffit d'adjoindre à un ensemble de gr. absolues la grandeur nulle (mod de l'add.) et leurs symétriques par rapport à cette grandeur.

+ Deux grandeurs relatives ont donc deux différences symétriques, suivant le sens de leur soustraction. Mais la soustraction reste uniforme dans chaque sens à part.

Enfin, si $A > B$, $B > C$, on a: $A > C$.
en vertu de l'axiome de la différence et de l'axiome:
$A + B > A$, valable seulement pour les gr. absolues.

— Cas particulier de l'addition: 2 grandeurs égales
On écrit: $A + A = 2A$
et en général: $(n+1)A = nA + A$.
C.à.d. que nA est la somme de n grandeurs égales à A.
On remarquera 1° que ce n'est pas une multiplication (¹)
n joue le rôle d'un indice: il indique combien de fois
A figure dans la somme: $A + A + A + \dots + A$.
C'est une simple abréviation d'écriture.
2° que le ~~nombre~~ coefficient n est essentiellement ~~un nombre~~ entier.
En vertu de l'axiome de l'addition, si A est une grandeur,
il existe une grandeur de même espèce égale (c.à.d. identique) à nA.
La réciproque est l'axiome de la divisibilité:
Étant donnée une grandeur A et un nombre entier n,
il existe une grandeur B de même espèce telle que
$$nB = A.$$
c.à.d. que A soit la somme de n gr. égales à B; ou
encore: que A est divisible en n parties égales.
On écrit dans ce cas: $B = \frac{1}{n} A = \frac{A}{n}$.
(Il ne s'agit pas d'une division véritable)
On démontre que cette division est uniforme c.à.d. qu'il
n'y a qu'une grandeur B qui vérifie l'éq: $nX = A$
On en conclut que, si: $A = B$, $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$.
On peut donc diviser ~~2 gr. égales~~ (multiplier ou) par un même nombre les 2 membres d'une ég. ou inég. entre gra[ndeurs]

(¹) Dans un produit, les 2 facteurs doivent être de même espè[ce]
On définira plus tard la vraie multiplication des grandeurs (¹)

Axiome de Archimède: Étant données 2 grandeurs de même espèce: $A > B$,
il existe un nombre entier n tel qu'on ait:

$$nB > A.$$

c.à.d: ~~Il y a un~~ Si petite que soit B, si grande que soit A, ~~Il y a un~~ les multiples de B ~~finissent~~ par surpasser A.

Cet axiome était déjà connu d'Euclide ~~puisqu'il définissait~~ est impliqué dans sa définition ~~du rapport~~ des espèces de grandeurs (V, 5):

Deux grandeurs ont rapport l'une à l'autre, quand, ~~étant multipliées, elles peuvent se surpasser l'une l'autre~~ la plus petite, répétée un certain nombre de fois, peut surpasser la plus grande.

Cet axiome ~~ne résulte nullement du précé~~ a pour corollaire l'axiome de la divisibilité à l'infini: en effet, en vertu du théorème précédent, on peut diviser les 2 membres par n:

$$nB > A \qquad B > \frac{A}{n}.$$

Ce qui veut dire: Si petite que soit B, on peut toujours diviser A en un nombre de parties assez grand pour qu'une de ces parties soit plus petite que B.

Cet axiome ne résulte nullement du précédent: en effet, celui-ci énonce simplement l'existence de $\frac{A}{n}$, quel que soit n, mais ne nous apprend pas quelle en est la grandeur ou la petitesse. Tout ce qu'il permet d'affirmer, c'est que:

$$\frac{A}{n+1} < \frac{A}{n} \quad (1)$$

c.à.d. que $\frac{A}{n}$ décroît quand n croît; mais non que $\frac{A}{n}$ décroît indéfiniment (~~devient~~ peut devenir plus petite que toute grandeur donnée, pour n suffisamment grand)

(1) En effet, soit $A = nB = (n+1)C$. Si $B \leq C$, on aurait:
$nB \leq nC < (n+1)C$. Ce qui contredit l'hypothèse.
Donc: $B > C$.

17e leçon (absolues

Les axiomes précédents suffisent à la mesure des grandeurs soit exacte, soit indéfiniment approchée.

Mesurer une grandeur, c'est représenter par un nombre le rapport de cette grandeur à une autre grandeur de même espèce, appelée *unité* (Sur l'idée de rapport, voir plus loin)

N. B. Cette unité de grandeur ou de mesure n'a que le nom de commun avec l'unité arithmétique : elle est divisible. Par suite, les grandeurs ne peuvent être assimilées ~~à des~~ aux nombres ; elles sont seulement représentées par eux, au moyen d'une correspondance essentiellement relative à l'unité de mesure. Dire d'une longueur qu'elle est égale à 3, ~~[illegible]~~ n'a pas de sens ; il faut dire qu'elle est égale à 3 mètres. Cette correspondance n'est pas naturelle, mais artificielle et conventionnelle : aucun nombre n'appartient en propre et intrinsèquement à une grandeur déterminée.

1° Si la grandeur à mesurer est un multiple de l'unité (le *n*-uple de l'unité) elle sera mesurée par le nombre *entier*.

Si : $m = n$, $m > n$, $m < n$,

on a : $mU = nU$, $mU > nU$, $mU < nU$,

et réciproquement. — On a de plus :

$$~~(m+n)U~~ = mU + nU = (m+n)U$$ +

c. à d. la somme de 2 grandeurs est mesurée par la somme des nombres qui les mesurent (les signes + ont des sens différents dans les 2 membres.)

$$m(nU) = (mn)U.$$

Si l'on multiplie une grandeur par un nombre, le nombre qui la mesure se trouve multiplié par le même nombre.

+ De même : $mU - nU = (m-n)U$ $(m > n.)$

D'où parallélisme complet entre les grandeurs et les nombres au p. de vue de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

D'autre part, la multiplication et la division sont distributives.
$$n(A+B) = nA + nB$$
$$\frac{1}{n}(A+B) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B.$$
de même pour un nombre quelconque de grandeurs.

On démontre encore que :
$$\frac{m.A}{n} = m\,\frac{A}{n}$$
c.à d. que le ne de mA est égal au m-uple de $\frac{A}{n}$:
On représente l'un et l'autre par la notation :
$$\frac{m}{n}A = B$$
qui équivaut à celle-ci : $mA = nB$.

L'ensemble des 2 nombres m et n constitue un facteur symbolique qu'on nomme fraction. Ce n'est pas un nombre.

Grâce aux fractions, on peut étendre l'idée de mesure.
Si la grandeur A à mesurer n'est pas un multiple de l'unité B mais ~~d'une fraction est commensurable avec elle~~, c.à d. d'une partie aliquote de l'unité

Si A et B sont multiples d'une même grandeur, on dit qu'elles sont commensurables entre elles.
$$A = aM \qquad B = bM$$
D'où : $M = \frac{B}{b}$ $\quad A = a\frac{B}{b} = \frac{a}{b}B$

Dans ce cas, la mesure de A par rapport à B est la fraction $\frac{a}{b}$ par laquelle il faut mult. B pour former A.
On dit encore que cette fraction exprime le rapport de A à B.

Cette fraction (facteur symbolique) indique qu'on doit diviser B par b, puis multiplier le résultat par a (ou inversement, en vertu de : $\frac{aB}{b} = a\frac{B}{b}$.)

On démontre : $\frac{m}{n}(A+B) = \frac{m}{n}A + \frac{m}{n}B$

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right)A = \frac{m}{n}A + \frac{m'}{n'}A$$

~~d'où~~ puis : $\frac{m+m'}{n}A = \frac{m}{n}A + \frac{m'}{n}A$

d'où : $\frac{m+m'}{n} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n}$.

règle de l'addition des fractions.

$$p\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{mp}{n}A$$

$$\frac{1}{q}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{m}{nq}A$$

$$\frac{p}{q}\left(\frac{m}{n}A\right) = \frac{mp}{nq}A$$

d'où : $\frac{p}{q}\times\frac{m}{n} = \frac{mp}{nq}$.

règle de multiplication des fractions

– Égalité. Deux fractions seront égales quand elles mesureront la même grandeur par rapport à la même unité

Si : $\frac{m}{n}A = \frac{m}{n}B$, $\quad A = \frac{p}{q}B$,

on a : $\frac{m}{n}B = \frac{p}{q}B$

$nA = mB \qquad qA = pB$

$nqA = mqB \qquad nqA = npB$

d'où : $mqB = npB \qquad mq = np$

Ainsi l'on définira $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ par : $mq = np$. (1)

D'où la réduction des fractions à leur plus simple expression, fractions irréductibles, et leurs propriétés – Et d'autre part, réduction de plusieurs fractions au même dénominateur

(1) Autre démonstration, un peu moins simple : $\begin{cases} A = aM, & A = a'M' \\ B = bM, & B = b'M' \end{cases}$ $\quad$ ~~b~~ $a'B = b'A$

$a'.bM = b'.aM$

$a'b = b'a$.

(notamment pour l'addition.)

Le cas où le rapport de 2 grandeurs est exprimé par une fraction irréductible est celui où elles sont mesurées par leur plus grande commune mesure. En effet, plus les nombres qui composent ce rapport sont grands, plus la commune mesure est petite, et réciproquement. De même que toute fraction égale à une fraction irréductible a ses termes équimultiples de ceux de celle-ci, de même toute commune mesure de 2 grandeurs est une partie aliquote de leur plus grande commune mesure. Pour abréger le processus de mensuration, il est bon d'avoir une méthode pour trouver à coup sûr la plus grande commune mesure.

Algorithme d'Euclide (comme pour le pgcd de 2 nombres) se justifie de la même manière.

$A = pB + B_1 \qquad B_1 < B.$

$B = p_1 B_1 + B_2 \qquad B_2 < B_1.$

$B_1 = p_2 B_2 + B_3 \qquad B_3 < B_2$

$\ldots\ldots$

$B_{n-2} = p_{n-1} B_{n-1} + B_n$

$B_{n-1} = p_n B_n \qquad A = a B_n \qquad B = b B_n$

$A = \frac{a}{b} B.$

En divisant tout par B_n on trouve (en nombres):

$a = pb + b_1$

$b = p_1 b_1 + b_2$

$\ldots\ldots$

$b_{n-2} = p_{n-1} b_{n-1} + 1$

$b_{n-1} = p_n$

Ainsi a et b ont pour pgcd. 1 : ils sont bien premiers entre eux.

On calcule $\frac{a}{b}$ par une fraction continue :

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{p_n} \qquad B_{n-2} = \left(p_{n-1} + \frac{1}{p_n}\right) B_{n-1}$$

$$B_{n-3} = \left(p_{n-2} + \cfrac{1}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}\right) B_{n-2} \qquad \text{etc.}$$

$$A = \left(p + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \dots \cfrac{1}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}}}\right) B.$$

ou

$$\frac{a}{b} = p + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \ddots \cfrac{1}{p_{n-1} + \cfrac{1}{p_n}}}}$$

En résumé, toutes les grandeurs commensurables avec leur peuvent se mesurer, soit par des nombres entiers, soit des couples de nombres entiers (fractions) qui expriment leur rapport (ou manière d'être) à l'égard de l'unité plus exactement, qui indiquent le moyen de composer ou de construire la grandeur mesurée, en partant de l'unité. Ce rapport se représente par : $\frac{A}{B}$. On a donc

soit : $\frac{A}{B} = n$ (ce qui signifie : $A = nB$) soit : $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$,

ce qui signifie, $A = aM$, $B = bM$.

Si l'on considère les fractions comme des nombres rationnels et qu'on les range par ordre de grandeur, on aura établi une correspondance uniforme entre ~~les~~ grandeurs commensurables l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble avec leur

Mais toutes les grandeurs ne sont pas commensurables avec une grandeur qcque, en vertu de la continuité.
Dans le cas de deux grandeurs incommensurables, l'algorithme d'Euclide est illimité, et ne donne aucun résultat (n'aboutit à aucun nombre rationnel.)
Néanmoins, il définit avec exactitude le rapport des deux grandeurs ~~en indiquant quels sont~~ en permettant de répartir tous les nombres rationnels en deux classes: ceux qui sont plus grands que ce rapport; ceux qui sont plus petits.
On dit qu'il définit alors un nombre irrationnel qui exprime ce rapport.

– L'ensemble des grandeurs possède les propriétés suivantes:[1]

1° Entre deux grandeurs différentes il y en a une autre, et par suite une infinité.

2° Il n'y a dans l'ensemble aucune grandeur qui soit plus grande ou plus petite que toutes les autres.

3°) Une grandeur quelconque partage l'ensemble en 2 classes, celle des gr. inférieures et celle des supérieures; toutes les grandeurs de la 1e cl. sont inférieures à celles de la 2e cl. et vice versa: enfin dans la 1e classe il n'y a pas de grandeur maxima, ni dans la 2e classe de grandeur minima.

– La continuité de l'ensemble des grandeurs consiste dans la réciproque de cette dernière propriété.
Supposons que dans l'ensemble G des grandeurs d'une même espèce on ait pris un ensemble H jouissant des propriétés précédentes (1° et 2°) ~~Il pourra présenter deux sortes de~~

(1) Dedekind y joint celle-ci: Si A > B, B > C A > C qui n'est pas un axiome, mais une conséquence des axiomes.

Supposons qu'on puisse le partager en 2 classes jouissant des propriétés précédentes, et telles, en outre, que la différence entre 2 grandeurs qqeques prises respectivt dans les 2 classes soit plus petite que toute grandeur donnée (ce qui a lieu si l'ensemble H vérifie l'axiome d'Archimède.) Dans ce cas, ~~l'axiome de la continuité~~ on dit que l'ensemble H présente une coupure.

L'axiome de la continuité peut s'énoncer ainsi :
Un ensemble de grandeurs G est continu, si à toute coupure d'un ensemble H correspond une grandeur, et une seule, de l'ensemble G.

Cette grandeur est plus grande que toutes celles de la 1e classe, plus petite que toutes celles de la 2e : elle est dite combler la coupure, ou encore la représenter : car ~~elle~~ peut définir cette coupure : on range dans une classe servir à toutes les grandeurs plus petites, dans l'autre toutes les gr plus grandes, et on la supprime elle-même la coupure se trouve ainsi réalisée.

— Considérons un ensemble des grandeurs commensurables (avec l'unité, donc entre elles) H présente une infinité de coupures, représentées par des grandeurs incommensurables.

A ~~ces~~ chaque grandeurs incomm on fait correspondre ~~autant~~ un nombre irrationnel qui vérifie les mêmes inégalités :

par ex. si : ~~$mB < n$~~

$$\frac{m}{n} B < A < \frac{m+1}{n} B$$

c.à.d. $$mB < nA < (m+1) B,$$

~~on fera co le n~~ irrat. α vérifiera les inégalités :

~~Définition de l'égalité~~ : Deux nombres irrationnels égaux sont identiques c.à.d. correspondent à la même coupure (puisqu'ils définit un seul

Comme dit Hoüel, un nombre irrationnel exprime ~~la~~ loi de formation d'une grandeur incommensurable avec l'unité

$$\frac{m}{n} < \alpha < \frac{m+1}{n}$$

ou $\quad m < \alpha n < m+1.$

La création des nombres irrationnels étant ainsi justifiée par la considération des grandeurs incommensurables, peut en être détachée et s'exposer à part. On posera en principe que toute coupure de l'ensemble des nombres rationnels doit être comblée par un nombre irrationnel.

Mais si, philosophiquement, les nombres rationnels ne sont pas de vrais nombres, les nombres irrationnels n'ont, a fortiori, aucune raison d'être en Arithmétique.

On définit alors l'addition des nombres irrationnels:

Soient 2 nombres irrationnels α, β, définis par les inégalités: $\quad a < \alpha < a', \quad b < \beta < b'.$

Les 2 classes $(a+b)$, $(a'+b')$, définissent un nombre, et un seul (rationnel ou irrationnel) qui est, (par définition dans le 2e cas) la somme $\alpha + \beta$. (1)

On définit de même la multiplication des n irrat.:

Les 2 classes (ab), $(a'b')$ définissent un nombre, et un seul, qui est (par définition, s'il est irrationnel) le produit $\alpha\beta$. (2)

On étend aux nombres irrationnels les propriétés des opérations arithmétiques. On peut alors les confondre avec les nombres rationnels sous le nom de nombres réels.

---

(1) Elle est plus grande que toute somme $(a+b)$ et plus petite que toute somme $(a'+b')$.

(2) Il est plus grand que tout produit (ab) et plus petit que tout produit $(a'b')$.

Revenons à la mesure des grandeurs.

Si une grandeur A est incommensurable avec l'unité ~~elle définit~~ un nombre irrationnel α. On définit par ce (il lui correspond) pseudo-nombre le rapport de A à U, ou la mesure de A par rapport à U: on écrit: $\frac{A}{U} = \alpha$, $A = \alpha U$ et l'on considère encore A comme le produit de l'unité par le coefficient α (symbolique) ~~car il n'indique aucune opération exécutable à effectuer sur U pour~~

Remarque: Quand on veut exprimer un nombre irrationnel en chiffres décimaux (ou en fraction systématique), on trouve une infinité de chiffres (ou de termes). Cela n'a rien d'étonnant ni d'absurde, et ne prouve nullement que le rapport à exprimer n'existe pas et n'est pas bien déterminé. Ce n'est pas plus choquant que de voir un rapport ~~rationnel~~ exprimé par une infinité de chiffres décimaux: $\frac{2}{3} = 0,666....$ est aussi bien représenté que $\frac{3}{4}$ par $0,75$, ou $\frac{7}{8}$ par $0,875$. Les deux faits viennent de ce qu'on a pris pour unités des grandeurs incommensurables avec la grandeur à mesurer ($\frac{2}{3}$ ne contient pas un nombre exact de $\frac{1}{10}$, de $\frac{1}{100}$, etc)

— L'axiome de la continuité implique l'axiome d'Archimède et par suite la divisibilité à l'infini. — Si on lui joint l'axiome suivant: « Il n'y a pas de grandeur minima » on peut en déduire l'axiome de la divisibilité, et par suite se passer de celui-ci.

— Une fois constitué l'ensemble des nombres réels, défini par des propriétés purement arithmétiques, l'axiome de la continuité peut s'énoncer comme suit: « A tout nombre réel correspond une grandeur ~~et une seule~~ de l'ensemble considéré » Mais cela suppose le choix d'une unité de mesure, et par suite les axiomes de la mesure. De plus, il ne faut pas oublier que la correspondance entre grandeurs et nombres est conventionnelle et arbitraire

18e leçon

Passons aux grandeurs relatives; par ~~définition~~ hypothèse, on a à ~~la~~ fois: $A = B + C$ $B = A + C'$

D'où: $B = (B + C) + C' = B + (C + C')$

Ainsi la grandeur $(C + C')$ a un effet nul dans l'addition; on est le module de l'addition; on la représentera par 0 (mod de l'add des nombres)

Par définition: $A + 0 = A,$

d'où: $0 = A - A.$

Les deux grandeurs C et C', dont la somme est 0, sont appelées symétriques. On peut écrire:

$C' = 0 - C$ $C = 0 - C'.$

Ainsi la symétrique d'une grandeur s'obtient en retranchant cette grandeur de la grandeur nulle. ~~Exp~~ Deux grandeurs relatives ont donc deux différences symétriques, suivant le sens de leur soustraction. La soustraction n'en reste pas moins uniforme dans chaque sens pris à part. On a:

$(A - B) + (B - A) = 0.$

Dans un ensemble de grandeurs absolues, il n'y a pas de grandeurs symétriques: car si $(A - B)$ existe, $(B - A)$ n'existe pas. On dit alors, par définition, que $A > B$. ce qui équivaut à: $A = B + C$, $(C \gtrless 0)$

Donc on peut affirmer, en général, que

$B + C > B$ $B + C > C$

Par suite: $A = A + 0 > 0$ à fortiori: $A + B > A > 0.$

c.à.d la somme de 2 gr. abs. ne peut être nulle

Pour construire avec cet ensemble un ensemble de grand[eurs] relatives, il suffit d'adjoindre à chaque grandeur une gran[deur] symétrique : à $C = A - B$, on fera correspondre une grandeur $C' = 0 - C$, qui sera par définition la diff[érence] $B - A$. — Pratiquement, cela consiste à prolonger au-delà de la grandeur nulle l'opération appelée soustraction (par hypothèse, elle est possible dans les deux sens ~~sans~~ exception).

On a à la fois : $C + C' = C - C = 0$,

ou plus généralement : $B + C' = B + 0 - C = B - C$

~~On est ainsi con~~ Ainsi ajouter C' équivaut à retranch[er] son symétrique C. On est conduit par là à assimi[ler] $+C'$ et $-C$, ou $+C$ et $-C'$, et à ~~considérer~~ employer les signes opératoires $+$ et $-$ pour distinguer les grandeurs symétriques (et le signe $-$ pour désigner le symétrique d'une grandeur quelconque).

On appellera positives les grandeurs primitivement absolues ; négatives, leurs symétriques.

Toutes les grandeurs positives (absolues) sont > 0 ; pour conserver la définition de l'inégalité, on dira que $A > B$, si $A - B > 0$ (c.à.d. est positive)

Or : $0 - C' = C > 0$ (par hyp.) donc : $0 > C'$

Toutes les grandeurs négatives sont plus petites que 0.

On peut donc dire ~~que~~ aussi que :

$A < B$, si $A - B < 0$ (c.à.d. est négative)

Les 2 définitions concordent, puisque si $A - B$ est pos. $B - A$ est nég. et réciproquement.

Si $A = B$, $A - B = B - A = 0$.

Deux grandeurs symétriques égales sont nécessair[emen]t nulles car on a à la fois : $C + C' = 0$ $C - C' = 0$.

La théorie des grandeurs relatives ou symétriques s'applique à toutes les grandeurs à deux sens : segments de droites ; angles (sens de rotation) ; et même surfaces et volumes (sens d'un triangle ou d'un parallélogramme, d'un tétraèdre ou d'un parallélépipède.) – Chacune de ces espèces de grandeurs peut servir d'exemple et d'illustration à cette théorie, qui ~~est~~ en est indépendante, étant générale (ainsi elle s'appliquera aux temps, aux vitesses, aux forces, aux températures ; aux intensités de courant (dans un sens) etc.)

– Nous allons considérer un ensemble de grandeurs à deux dimensions : c.à.d chaque grandeur complexe dépend de 2 grandeurs simples ou réelles, telles que celles que nous avons étudiées jusqu'ici. On pourrait faire cette théorie in abstracto et d'une manière générale mais il vaut mieux l'éclairer par un exemple concret, qui servira en même temps à illustrer la théorie des grandeurs réelles.

Ensemble des vecteurs dans le plan. Définition du vecteur ; ~~qu~~ Egalité de 2 vecteurs, en grandeur, en direction et en sens. Chaque vecteur est défini par 2 grandeurs, sa longueur (module) et sa direction (argument)

Pour plus de commodité, on le définira par deux grandeurs homogènes, 2 longueurs, ses projections sur 2 axes rectangulaires Ox, Oy (avec sens) (1) Les 2 ~~coor~~ projections ~~sont des nombres~~ seront mesurées par des nombres ~~grandeurs~~ réels x, y.

Tout vecteur équivaut à un vecteur issu de l'origine

(1) N.B. On sait mesurer des longueurs, c.à.d les représenter par des nombres réels qualifiés.

du plan

On peut donc réduire l'ensemble des vecteurs à celui des vecteurs issus de l'origine, ou (comme chacun est alors déterminé par son extrémité) à l'ensemble des points du plan : leurs coordonnées rectangulaires étant x et y.

Addition des vecteurs. On porte le 2e (parallèlement à lui-même) au bout du 1er, et on joint l'origine du 1er à l'extrémité du 2e. Le vecteur ainsi construit est leur somme.

$$AB + BC = AC \quad \text{(formule de Möbius)}$$

L'addition ainsi définie est commutative & associative. Son module est le segment dont les 2 extrémités coïncident.

On a aussi : $AB + BC + CA = 0$.

Cette formule générale justifie les règles d'addition des nombres qualifiés : Un vecteur réel peut être figuré par un déplacement sur l'axe des x.

Soustraction. Pour retrancher un vecteur on ajoute son symétrique. En effet, si : $AC = AB + BC$,

$AC - BC = AB$ ou $AC + CB = AB$.

(la soustraction étant définie l'opération inverse de l'addition)

Dans le plan : Chaque vecteur est la somme de ses projections d'où la notation $x + iy$

i indiquant l'unité portée sur l'axe Oy (dans le sens positif) pour la distinguer de l'unité sur Ox (représentée par 1)

Somme de 2 vecteurs : $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1 \quad A_2B_2 + B_2C_2$

Donc : $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Inversement : $AB = OB - OA$

d'où : $(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$

Les vecteurs symétriques ne diffèrent que par le sens :

$$AB + BA = 0.$$

Multiplication des vecteurs. Le produit doit être au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité. Or le rapport de 2 grandeurs complexes est complexe : rapport de grandeur (rapport des longueurs); rapport de direction (angle, ou différence des arguments.)

~~$r_\theta \times r'_{\theta'} = rr'_{\theta+\theta'}$~~ L'opération se ramène à une construction de triangles semblables (directement, c.à.d. en tenant compte de leur sens.) En effet, pour que

$OA : OB :: OC : OD$, il faut que l'on ait :

$a : b = c : d$ et $\alpha - \beta = \gamma - \delta$.

Si a_α est l'unité réelle $+1$, $a = 1$, $\alpha = 0$:

$bc = d$, $\beta + \gamma = \delta$.

D'où la règle : $r_\theta \times r'_{\theta'} = rr'_{\theta+\theta'}$

Le produit de 2 vecteurs a pour longueur le produit de leurs longueurs et pour argument la somme de leurs arguments.

Cette multiplication est évidemment commutative et associative (puisqu'elle se compose de 2 opérations, add. et mult., qui jouissent de ces propriétés.) Elle est en outre distributive par rapport à l'addition.(2)

Cette définition générale de la multiplication justifie d'abord les règles de mult^on des nombres qualifiés (1) et la règle des signes (ch. signe − représente une rotation de 180° autour de l'origine.) $(-1)(-1) = +1$

La mult^on par i représente une rotation de 90° :

$$(+i)(+i) = -1. \qquad i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ces formules définissent le rôle que joue l'unité i dans la mult^on.

(1) Remarque : Cela donne un sens à la mult^on d'une grandeur par un nombre réel, ce nombre représentant le rapport de 2 grandeurs.

(2) (v. Hoüel.)

Par conséquent, comme la mult^on de vecteurs possède toutes les propriétés de la mult^on algébrique, elle sera exprimée par la formule :

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ainsi la théorie des nombres imaginaires résulte de celle des grandeurs à 2 dimensions. Sans doute, son origine historique se trouve dans l'Algèbre (racines imaginaires, c.à.d. racines carrées de nombres négatifs) ; mais ces symboles numériquement absurdes n'ont pris un sens que grâce à l'interprétation géométrique de Argand. Cette interprétation est trop particulière : elle n'est qu'une illustration de l'interprétation générale, qui consiste à considérer les nombres complexes comme représentant des grandeurs à 2 dimensions.

L'ensemble des nombres complexes forme la base de l'Analyse, parce que c'est l'ensemble le plus général ~~dans lequel on puisse effectuer les opérations~~ des grandeurs qui puissent être soumis aux règles du calcul algébrique, c.à.d. à des opérations possédant toutes les propriétés des opérations arithmétiques ; et en même temps c'est l'ensemble assez vaste pour que toutes les opérations y soient possibles sans exception, et que par suite le calcul algébrique (la résolution des équations) n'y soit sujet à aucune restriction. (On verra plus tard comment le théorème fondamental de l'Algèbre se démontre pour cet ensemble.) C'est pourquoi il n'y a pas d'imaginaires à 3 dimensions.

D'où, en faisant : $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, on peut déduire les formules d'addition de la Trigonométrie (cf. Hoüel et Stolz)

19e leçon

Théorie des ensembles de grandeurs à n dimensions (représentés par des nombres complexes à n unités)

Si l'on construit des ensembles à 2 dimensions, de la forme : $\alpha = a_1 u_1 + a_2 u_2$ $\quad \beta = b_1 u_1 + b_2 u_2$,

$u_1\ u_2$ étant les 2 unités composantes, on peut définir l'égalité de 2 nombres : $\alpha = \beta$

par : $a_1 = b_1$, $\quad a_2 = b_2$.

En particulier, $\alpha = 0$, si : $a_1 = a_2 = 0$.

On définit l'addition par la formule :

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2.$$

De même la soustraction. L'addition est commutative et associative : elle a pour module 0.

Pour que le produit de 2 nombres soit un nombre du même ensemble, il faut que le produit de 2 unités soit ~~une fonction linéaire de ces unités~~ ~~soit un~~ lui-même un nombre complexe :

$$u_1 u_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \qquad u_2 u_2 = \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2$$

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 = \mu u_1 + \mu u_2$$

La multiplication devra vérifier les lois commutative et associative ; être distributive par rapport à l'addition ; enfin avoir un module.

Dans ces conditions, il n'y a que 3 systèmes possibles. Dans 2 de ces systèmes, il y a des nombres non nuls dont le produit est nul (ou dont le carré est nul).

Dans le 3e, la formule de multiplication est (si l'on prend pour unités e le mod. de la mult. et $i = \sqrt{-e}$) :

$$(a_1 e + a_2 i)(b_1 e + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) e + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

C'est l'ensemble des nombres imaginaires, où : $\begin{cases} e = 1 \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$
Dans cet ensemble, le produit de 2 nombres n'est nul que si l'un des facteurs est nul. La division par un nombre non nul est donc toujours possible et univoque.
Cet ensemble est donc le seul qui possède toutes les propriétés énoncées, c.à.d. qui vérifie toutes les lois du calcul algébrique (qui sont celles du calcul arithmétique.) En d'autres termes, cet ensemble de grandeurs est le seul qu'on puisse représenter par des nombres soumis aux mêmes règles de calcul que les nombres ~~réels~~ complexes ou rationnels.
Question : Y a-t-il des ensembles de grandeurs à plus de 2 dimensions qui jouissent des mêmes propriétés ?
Pour le savoir, on construit un ensemble de nombres complexes à n unités, et l'on suppose qu'il vérifie les lois commutative ~~et~~ associative de l'addition, puis les lois commutative, associative et distributive de la multiplication (avec module).
Dans ces conditions, on peut ~~lui donner~~ le rapporter à n unités $e_1, e_2 \ldots e_n$ telles que : $e_i e_i = e_i$,
et que : $e_i e_k = 0$ pour $i \gtrless k$
Alors le produit de 2 nombres a la formule :
$(a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n)(b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n) = a_1 b_1 e_1 + \ldots + a_n b_n e_n$
Le mod. de la mult. est : $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.
Il y a des nombres non nuls dont le produit est nul
par ex : $\alpha = a_1 e_1 + \ldots + a_k e_k \qquad \beta = b_{k+1} e_{k+1} + \ldots + b_n e_n$
$\alpha\beta = 0$. L'ensemble se décompose en ensembles partiels tels que chaque nombre de l'ens. total soit la somme de composantes appartenant respectiv^t à ces ensembles partiels.
Deux nombres appartenant à 2 ens. part. diff. ont leur produit nul.

Au contraire le produit de 2 nombres d'un ens. part. est un nombre du même ensemble, et il n'est nul que si l'un des facteurs est nul.

Or ces ensembles partiels sont à 1 ou 2 unités. Si un ensemble partiel n'a qu'une unité, il est semblable à l'ensemble des nombres réels. S'il a deux unités, il est semblable à l'ensemble des nombres imaginaires. (On a par ex: $ee = e$, $ei = ie = i$, $ii = -e$)

Ainsi un ensemble de grandeurs à n dimensions qui ~~vérifie~~ obéit aux règles du calcul algébrique se décompose en ensembles partiels semblables à celui des nombres réels et à celui des nombres imaginaires. De plus, il comporte toujours des diviseurs de zéro. C'est pourquoi l'ensemble des nombres imaginaires est le plus général qui puisse servir de base à l'Analyse car il convient qu'on puisse y effectuer toutes les opérations arithmétiques sans exception ni équivoque.

— Néanmoins, les ensembles de grandeurs à n dimensions possèdent certaines propriétés générales, relatives à l'ordre et à la situation de leurs éléments, qui font l'objet de la théorie générale des ensembles.

~~Un~~ ensemble de grandeurs à n dimensions s'appelle l'espace à n dimensions (par une métaphore géométrique). Cela signifie que chacune des grandeurs de cet ensemble dépend de n grandeurs linéaires, mesurées par n nombres réels, qu'on nomme ses coordonnées. On la représente par un nombre complexe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ou $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

Mais l'ensemble des nombres complexes n'est qu'une représentation d'un ensemble continu de grandeurs, comme l'ensemble des nombres réels représente l'ensemble des segments d'une droite, et l'ens. des n imaginaires, l'ens. des vecteurs du plan (2)

Comme dans ce dernier cas, on remplace la grandeur de coord $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ par le point $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ qui constitue un élément de l'espace à n dimensions.

— Dans l'ensemble total (continu)(1) des grandeurs à n dimensions, on peut distinguer une infinité d'ensembles partiels, composés ~~de points~~ d'éléments ou points caractérisés par certaines propriétés. C'est de ces ensembles, ~~qu'on construit~~ extraits de l'espace à n dimensions, qu'on va s'occuper désormais.

Écart de 2 points ~~(ou différence de 2 grandeurs)~~:

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

Leur distance est: $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$

L'un et l'autre s'annulent à la fois, seulement quand on a à la fois: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots\ldots$ $x_n = y_n$

La seule différence est que si l'on fixe une limite supérieure à l'écart et à la distance des points qui environnent un point fixe donné, l'ensemble de ces points forme dans le 1er cas un cube, dans le 2e cas une sphère. Ce cube ou cette sphère sera ce qu'on appellera le voisinage du point donné.

(2) Il faut remarquer, en effet, que ce qui fait l'unité du nombre complexe, c'est l'unicité de la grandeur qu'il représente; autrement, il n'est plus que le rapprochement conventionnel et arbitraire de n nombres réels dans un cert. ordre.

(1) C.à.d. que chaque coordonnée prend toutes les valeurs de l'ensemble continu des nombres réels.

Point limite : Un point P de l'espace à n dimensions sera un point-limite de l'ensemble E, s'il y a dans son voisinage un point de E, si petit que soit ε.
Ainsi l'on prendra ε_1 : il y aura un point de E dont l'écart sera $< \varepsilon_1$. On prendra alors ε_2 inférieur à cet écart ; il y aura un autre point de E dont l'écart à P sera $< \varepsilon_2$; et ainsi de suite. On peut déterminer ainsi une suite infinie d'écarts décroissants : $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ et ~~de~~ une suite infinie de points $P_1\ P_2 \ldots P_n \ldots\ldots$ qui se rapprochent indéfiniment du point-limite P.

+ Remarque : Le point-limite P peut appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble E. Exemple : L'ensemble des points : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$
a pour point-limite 0.

On peut donc dire qu'un point-limite est tel, qu'il y a ~~une~~ dans son voisinage une infinité de points de l'ensemble E (puisque chaque écart contient l'infinité des points suivants.)

Inversement un point qcque de l'ensemble E n'est pas nécessairement un point-limite ; dans ce cas, il y a un certain écart ε au-dessous duquel il n'y a plus de points de l'ensemble dans le voisinage du point P.
Un tel point est appelé <u>isolé</u>.
Un ensemble qui ne contient que des points isolés est dit lui-même isolé.

<u>Ensemble dérivé</u> de P : ensemble des points limites de P.
Un ensemble est <u>fermé</u>, s'il contient son dérivé. ○
<u>condensé</u>, s'il est contenu dans son dérivé.
<u>parfait</u>, s'il est identique à son dérivé.

○ Tout ensemble dérivé est fermé.

Exemple : L'ensemble des nombres rationnels a pour dérivé l'ensemble des nombres réels : il est donc condensé : et l'ens. des nombres réels est parfait.

Définition de la continuité d'un ensemble à n dimensions

Un ensemble continu doit d'abord être ~~fermé~~ parfait : il ne suffit pas qu'entre deux points il y en ait toujours un autre (Bolzano) disait que chacun de ses points doit avoir un voisin c.à.d. être un point limite. Inversement, un ens. continu doit contenir tous ses points-limites.

Mais cela ne suffit pas : car un ensemble parfait peut être composé de plusieurs ensembles parfaits séparés c.à.d. tels que les écarts entre 2 de leurs points restent toujours $> \varepsilon$.

Il faut donc en outre que l'ensemble soit d'un seul tenant (Jordan) ou connexe (Cantor) ou bien enchaîné : c.à.d qu'on puisse ~~[illegible]~~ si petit que soit ε intercaler entre 2 points qcques une chaîne de points (app. à l'ens.) tels que l'écart de 2 points consécutifs soit $\leq \varepsilon$.

Un ensemble continu est donc à la fois connexe et parfait (Il suffit qu'il soit fermé et connexe : car un ensemble fermé et connexe est par là même parfait : Jordan.)

Théorème de Weierstrass : Tout ensemble borné et infini possède au moins un point limite.

L'ensemble E_0 a pour complémentaire l'ensemble E_1 des points de l'espace à n dimensions qui n'apport. pas à E_0. La frontière de $E_0 E_1$ se compose des points qui appart. à la fois à E_0 et à E_1', ou bien à E_1 et à E_0'.

L'intérieur de E_0 comprend les points de E_0 qui n'appart. pas à E_1'. — L'extérieur de E_0 (ou intérieur de E_1) comprend les points de E_1 qui n'appartiennent pas à E_0'. (L'extér. des points)

— Théorème : La frontière d'un ensemble est toujours un ensemble fermé (qui contient son dérivé)

Exemple : L'ensemble des n. rationnels est connexe si on lui ajoute les n irrationnels (p. limites) il devient parfait

Exemples : L'ensemble des nombres rationnels entre 0 et 1 n'a pas d'intérieur : tous ses points sont frontières. De même l'ensemble des nombres irrationnels.

Dans un ensemble linéaire (à 1 dimension), on peut définir la limite supérieure et la lim. infér. (ce sont les 2 points-frontières extrêmes.)

N. B : Il est faux de dire qu'un ensemble ~~borné~~ contient un maximum et un minimum ; cela ~~peut n'être plus~~ n'est nécessairement vrai que pour un ensemble fini de grandeurs.

Bolzano a remarqué le premier la fausseté de cet axiome (1817) : il l'a remplacé par le théorème suivant :

Si un ensemble E ne contient pas une ~~grandeur~~ grandeur maxima l'ensemble des grandeurs plus grandes que toutes celles de l'ensemble E contient une grandeur minima. Cette grandeur (la plus petite des grandeurs supérieures à toutes celles de E) s'appelle limite supérieure de E. De même si un ensemble E ne contient pas de grandeur minima ~~il y a une grandeur plus grande~~ l'ensemble des grandeurs plus petites que toutes celles de E contient une grandeur maxima : limite inférieure de E.

Comment on prouve l'existence de la limite supérieure et comment on la détermine : (ou du maximum) :

On range dans une 1e classe toutes les grandeurs de l'ensemble E et toutes celles qui sont plus petites que l'une d'elles ; et dans une 2e classe toutes les grandeurs plus grandes que toutes celles de E. On définit ainsi une coupure, qui, en vertu de la continuité des grandeurs, est représentée par une grandeur. Soit la plus grande de la 1e classe (c'est le maximum) soit la plus petite de la

2e classe (c'est la limite supérieure)

De même pour le minimum ou la limite inférieure

Propriétés caractéristiques de la limite supérieure I_1:

1° Il n'y a pas dans l'ensemble E_1 de grandeur supérieure à I_1 (puisque par déf. elle est plus grande que toutes les E_1

2° ~~Quelle que soit la grandeur~~ Il y a au moins une grandeur de l'ensemble E_1 supérieure à $I_1 - \varepsilon$ si petit que soit ε

En effet, s'il n'y en avait pas, $(I_1 - \varepsilon)$ serait encore supérieure à toutes les grandeurs de E_1, et appartiendrait à la 2e classe; donc I_1 ne pourrait être la plus petite des grandeurs de cette classe.

Ces propriétés caractérisent la grandeur I_1: ~~Alors~~ la 1re ne peut appartenir à une grandeur inférieure à I_1, puisque si petit que soit ε, il y a une grandeur E_1 supérieure à $I_1 - \varepsilon$; donc $(I_1 - \varepsilon)$ ne peut être supérieure à toutes les grandeurs E_1. La 2e ne peut appartenir à une grandeur supérieure à I_1, soit $I_1 + \varepsilon$: car alors il existerait une grandeur $(I_1 + \varepsilon) - \varepsilon = I_1$ telle qu'aucune grandeur de E_1 ne ~~fût~~ serait supérieure à I_1. La grandeur I_1 est donc tout ~~et bien~~ déterminée (par la répartition en 2 classes de toutes les grandeurs)

Un nombre irrationnel (une grandeur incommensurable) est la limite supérieure de l'ensemble des nombres plus petits et la limite inférieure de l'ensemble des nombres plus grands. Cela est d'ailleurs vrai d'un nombre réel quelconque (d'une grandeur qcq), rien ne distinguant les commensurables des incommensurables)

L'existence d'une limite, supérieure (ou inférieure) pour tout ensemble de grandeurs borné équivaut ~~au principe~~ à l'axiome de la continuité (Burali-Forti, Formulaire, IV, p. 8.)

20e leçon

Suites, séries et produits infinis.

Une suite est une espèce d'ensemble: c'est un ensemble (infini) rangé dans un ordre linéaire, à partir d'un premier élément, de telle sorte qu'après chaque élément il y en a un ~~et un seul~~ suivant unique et bien déterminé (1)

Deux manières de donner une ~~suite~~ infinie:

Ou bien on donne le moyen de calculer chaque terme au moyen du précédent (loi de récurrence ou plutôt de formation progressive);

Ou bien on donne le moyen de calculer un terme connaissant son rang (c à d en fonction de son indice)

De toute manière c'est un ensemble bien défini et bien ordonné. (et se compose d'une infinité de nombres différents)

Si cet ensemble est borné, il a au moins un point-limite. Il peut ~~même~~ en avoir plusieurs, ou même une infinité. Mais si l'on en considère un à part, on pourra l'isoler, en tenant compte de l'ordre de l'ensemble: on exclura de l'ensemble tout ~~nombre~~ point qui s'éloignera du p. limite plus que l'un des précédents; de telle sorte que la suite se rapproche de plus en plus du point-limite (tende ou converge vers lui.) Elle aura une limite unique.

— Le caractère de la limite ~~étant~~ est qu'il y a toujours un point de l'ensemble dans son voisinage; on appellera voisinage d'un nombre réel α l'intervalle $(\alpha-\varepsilon \;\; \alpha+\varepsilon)$; ou, dans l'ensemble des nombres complexes, l'ensemble des nombres x tels que $|x-\alpha| \leqq \varepsilon$, (le cercle de rayon ε représenté par)

---

(1) Une suite infinie est donc semblable à la suite naturelle des nombres entiers; elle peut lui correspondre, de sorte qu'on peut numéroter tous ses éléments: $u_1\, u_2 \ldots u_n$.

ε En vertu de la constitution de la suite, si soit u_n le premier terme qui tombe dans l'intervalle ε, tous les termes suivants y tombent aussi:
Le caractère de la limite V est donc celui-ci: A tout nombre ε correspond un entier n, tel que pour tout entier $p \geq n$ on a: $[V - u_p] < \varepsilon$. Cas particulier: limite
(pour les réels seulement) ce qui équivaut à: $V - \varepsilon < u_p < V + \varepsilon$ si $|u_p| < \varepsilon$
c.à.d.: tous les termes qui suivent $\underline{u_n}$ tombent dans l'intervalle $(V-\varepsilon, V+\varepsilon)$. Cela a lieu si petit que soit ε
Remarque: Cette définition de la limite est plus restreinte que celle du point-limite, car il suffit qu'un point sorte de l'intervalle ε pour qu'elle tombe en défaut (1)
Cela si petit que soit ε, ou si grand que soit $\underline{n}$.
N. B: Un point-limite peut appartenir ou non à l'ensemble. De même, la valeur-limite d'une suite peut en faire partie ou non: Ex: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ limite: 0:
$1,\ 1{,}1,\ 1{,}01,\ 1{,}001$, etc. limite: 1
Conséquence de l'existence d'une limite V: Soient $p, q \geq n$
$[V - u_p] < \varepsilon$, $[V - u_q] < \varepsilon$, donc: $[u_p - u_q] < 2\varepsilon$.
On dit que la suite est $\underline{\text{convergente}}$ si à chaque nombre pos. ε correspond un entier $\underline{n}$, tel que, pour tous les entiers $p, q \geq n$ on ait: $[u_p - u_q] < \varepsilon$.
C.à.d: si à partir d'un certain rang, tous les termes diffèrent entre eux de moins de ε.
La convergence est une propriété intrinsèque de la suite, indépendante de l'existence de la limite.
Définition équivalente: si l'on a: $[u_n - u_p] < \varepsilon$ ($\underline{n}$ fixe)
ou encore: $u_n - \varepsilon < u_p < u_n + \varepsilon$ (pour les réels)

(1) Aussi ne suffit-il plus qu'il y ait un nombre infini de termes dans un intervalle fini: il faut encore qu'en resserrant les bornes de l'intervalle, il n'y en ait jamais qu'un qui contienne un nombre infini, et qu'il contienne $\underline{\text{tous}}$ les termes ultérieurs sans exception

Toute suite qui a une limite est convergente; cela résulte évidemment de ce qui précède.

Réciproquement, toute suite convergente a une limite. En effet, à partir du rang n ~~tous~~ les termes tombent dans l'intervalle $(u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon)$ et l'on peut resserrer indéfiniment cet intervalle. De deux choses l'une: ou bien il contiendra toujours zéro, et alors ~~il y aura tou~~ les termes de la suite finissent par différer de zéro de moins de ε c.à.d. ont pour limite 0; ou bien zéro finit par rester hors de l'intervalle ε. ~~Dans ce cas, on considérera la suite nouvelle~~ ~~pour savoir si un nombre réel qcq a est limite~~

$u_1 - a, \; u_2 - a, \ldots \; u_n - a, \ldots\ldots$

également convergente. Ou bien elle a 0 pr limite, c.à.d. que $|u_n - a|$ finit par devenir $< \varepsilon$; alors u_n a pour limite a, par définition. Ou bien ~~tous~~ ses termes finissent par être tous positifs, ou tous négatifs(1); alors on rangera a dans la 1e classe ou dans la 2e. On répartira ainsi tous les nombres réels (sauf un) en 2 classes (car s'il y en restait 2, a et b, on devrait avoir:

$|u_n - a| < \varepsilon \qquad |u_n - b| < \varepsilon$ donc: $|a - b| < 2\varepsilon$

si petit que fût ε, ce qui est contradictoire)

Cette répartition définit un nombre réel qui sera la limite de la suite.

Cas particulier: Si une suite a ses termes constamment [di] croissants, mais inférieurs ~~à une abs~~ en val. abs. à une quantité donnée, elle a une limite (c'est un ensemble infini borné) (Dans ce cas, c'est la limite supérieure (ou inf.) de l'ensemble)

(1) Plus génér.t leur valeur absolue finit par être plus grande qu'un nombre positif donné.

Si les suites u_n, v_n ont pour limites U et V, les suites $(u_n + v_n)$ et $u_n v_n$ sont convergentes et ont pour limites $U+V$ et UV.

Ainsi les opérations arithmétiques sur les termes généraux des suites ~~opp~~ correspondent aux mêmes opérations effectuées sur leurs limites.

Une fonction entière est une combinaison d'additions et de multiplications. Donc: La fonction entière $f(u, v, w)$ a pour limite $f(U, V, W.)$

Séries et produits infinis. [infinitinômes]

Sommes et produits d'un nombre infini de termes rangés dans un ordre linéaire déterminé à partir d'un premier.+

La série: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ est convergente si la suite: $S_n = u_1 + \dots + u_n$ est convergente.

Le produit infini: $u_1 u_2 \dots u_n \dots$ est convergent si la suite: $p_n = u_1 \dots u_n$ est convergente.

En somme une série ou un produit n'est pas autre chose qu'une loi de formation progressive d'une suite.

La limite d'une série ou d'un produit est la limite de la suite correspondante ($\lim S_n$, $\lim p_n$)

Remarque: La limite 0 est exceptionnelle: aussi ne considère-t-on pas comme convergent un produit qui a pour limite 0.

De la condition de convergence des suites résultent les conditions de convergence des séries et des produits.

+ Leurs termes peuvent être donnés comme ceux d'une su[ite]

Une série est convergente si à tout nombre ε correspond un entier n tel que pour tout entier k on ait : $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$ (ou $S_{n,k}$)

c.à.d. $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon$.

Un produit est convergent si —— tel que $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon$ c.à.d.

$|u_1 u_2 \dots u_n (1 - u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+k})| < \varepsilon$. (ou : $|1 - u_{n+1} \dots u_{n+k}| < \eta$)

En particulier, on doit avoir : $|u_{n+1}| < \varepsilon$

c.à.d. que le terme général doit avoir pour limite 0 (Condition nécessaire de la série, mais non suffisante. Exemple

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots)$$

Pour le produit, on doit avoir en partic. : $|1 - u_{n+1}| < \eta$, c.à.d. que le terme général doit avoir pour limite 1 (condition nécessaire mais non suffisante) Voilà pourquoi on ne considère pas comme convergent un produit qui a pour lim. 0 ; par ex.

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \dots\dots$$

On est ainsi amené à écrire un produit sous la forme

$$(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)\dots$$

de sorte que, s'il est convergent v_n a pour limite 0.

Une série à termes tous positifs engendre une suite à termes constamment croissants. Donc si une somme infinie à termes positifs reste inférieure à une quantité fixe A elle est convergente, et a une limite au plus égale à A.

Une telle série reste convergente si l'on ~~diminue~~ supprime quelques-uns de ses termes, en nombre fini ou infini. car la ~~somme~~ valeur absolue de $S_{n,k}$ ne peut que diminuer. (on change de signe)

Une telle série, quand elle est divergente a une somme infinie.

Séries absolument convergentes : convergentes quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue. On la transforme ainsi en séries à termes positifs.
Dans une série abs. convergente on peut changer l'ordre des termes sans changer la limite ou somme de la série.
Dans une série non abs. convergente on ne peut changer l'ordre que de un nombre fini de termes, et en remplacer qu'un nombre fini par leur somme effectuée. +
Si 2 séries sont abs. convergentes et ont pr lim. resp. A. B, la série formée par la sommation de tous leurs termes (dans un ordre qcque) sera abs. convergente et aura pour limite A + B.
De même la série formée par les produits 2 à 2 de tous leurs termes (ou dont le terme gén est :

$$(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1)$$

est abs. convergente et a pour limite AB.
Ainsi les séries abs. convergentes jouissent de toutes les propriétés des sommes ou des polynomes. Toute fonction entière de leurs limites peut se développer (se représenter) en une série absolument convergente.
Pour qu'un prod : $(1+u_1)(1+u_2) \dots (1+u_n) \dots$ où tous les u sont de même signe soit convergent, il faut et il suffit que la série (à termes positifs) :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

soit convergente. – Un produit est absol convergent si la série corresp est abs. convergente : c à d qu'on peut intervertir l'ordre des facteurs (1). Il jouit de toutes les propriétés des produits finis

+ De plus (propriété capitale) : dans une série non absolument convergente la somme dépend de l'ordre permis : on peut lui assigner telle limite qu'on veut.

(1) Sans changer sa limite ; Elle n'est nulle que si l'un des facteurs est nul

Une série à termes complexes est convergente si les deux séries formées par les éléments réels et imaginaires de tous ses termes sont toutes deux convergentes. On est donc ramené à la considération des séries à termes réels. Mais c'est inutile, attendu que le critérium de convergence porte sur la valeur absolue des termes et par suite s'applique également aux nombres complexes. D'ailleurs, le module d'une différence ne peut être inf. petit sans que les 2 éléments le soient:

$$|(x_n + iy_n) - (X + iY)| < \varepsilon \quad |x_n - X| < \varepsilon \quad |y_n - Y| < \varepsilon.$$

– Critères généraux de convergence et de divergence (pour les séries à termes positifs)

On compare la série Σu_n à étudier à une série Σv_n connue convergente ou divergente; c.à.d. qu'on considère le rapport: $\frac{u_n}{v_n}$.

Si le rapport finit par être compris (à partir d'un rang n) entre 2 nombres positifs a et b, les deux séries convergent ou divergent simultanément.

Si $\frac{u_n}{v_n}$ ~~reste < b~~ finit par devenir et rester $< b$, et si Σv_n est convergente, Σu_n l'est aussi.

Si $\frac{u_n}{v_n}$ finit par devenir et rester $> a$, et si Σv_n est divergente, Σu_n l'est aussi.

En particulier, si $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite finie, il reste $< b$; si $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite non nulle, il reste $> a$.

On prend pour type de série convergente la progression géométrique: $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1)$

et la série: $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots \quad (k > 1.)$

Type de série divergente: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

et la série géométrique pour $x \geq 1$.

De la considération de la série géométrique on déduit les 2 critères ~~de convergence~~ suivants :

1° Si : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k < 1$. convergence
> 1 divergence

2° Si : $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, converg. ; > 1, divergence.

D'ailleurs, ~~et~~ si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont une limite, cette limite est la même.

Dans le cas où : $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n} = 1$, il y a incertitude (Voir les critères supérieurs de P. du Bois Reymond ap. Stolz, ~~§~~ Arithmétique générale, ch. X)

Autres critères, dus à Abel (v. Tannery § 71) :

Si l'on a une série convergente Σu_n, et une suite de nombres positifs décroissants ε_n, la série $\Sigma \varepsilon_n u_n$ est convergente.

Si l'on a une suite de nombres positifs décroissants tels que $\lim \varepsilon_n = 0$, et si Σu_n reste constamment inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, la série $\Sigma \varepsilon_n$ est convergente (cf. Méray § 99 ; démonstration Riquier

— Les suites et séries peuvent servir à la définition du nombre irrationnel (Weierstrass, Cantor, Méray) Mais il y a plusieurs inconvénients : 1° On a plusieurs expressions différentes du même nombre irrationnel, ce qui oblige à définir l'égalité de 2 nombres irrationnels ; 2° On est tenté de ~~définir~~ confondre le nombre irrationnel comme la limite de la suite ou série qui le définit, ce qui est ~~absurde~~ un cercle vicieux : la suite n'a de limite qu'une fois le nombre irrationnel créé et défini. 3° Si l'on évite cette faute, ~~on~~ la création du nombre irrationnel est arbitraire ; et elle scinde la théorie des suites et des limites : on est obligé de recommencer la théorie pour les limites irrationnelles alors que rien ne les distingue des limites rationnelles. ~~C'est qu'~~

Cela prouve que la création du nombre irrationnel doit être antérieure à la théorie des suites. En effet, le concept de limite repose sur la considération de la continuité des grandeurs; il faut donc avoir d'abord défini cette continuité et en avoir construit un schème numérique adéquat.

— Notes: M. Méray dit que les termes d'une suite finissent par jouir d'une propriété, si à partir d'un certain rang n tous les termes la possèdent. (C'est un synonyme de la locution: deviennent et restent.)

Théorème: Si u_n est une variante infiniment petite, qui décroît constamment, et si dans la série

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \dots$$

la somme des p termes qui suivent le n^e reste finie $(< H)$ quels que soient n et p, la série:

$$\theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 + \dots + \theta_n u_n + \dots$$

est convergente.

Démonstration de M. Riquier: En appelant $S_{n,p}$ la somme des p termes qui suivent le n^e dans cette dernière série, on a:

$$S_{n,p} = \Theta_{n,1}(u_{n+1} - u_{n+2}) + \Theta_{n,2}(u_{n+2} - u_{n+3}) + \dots$$
$$+ \Theta_{n,p-1}(u_{n+p-1} - u_{n+p}) + \Theta_{n,p}\, u_{n+p}$$

d'où: $$|S_{n,p}| \leq H\left[(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \dots + (u_{n+p-1} - u_{n+p}) + u_{n+p}\right] = H \times u_{n+1}.$$

Donc $|S_{n,p}|$ est infiniment petite. — On en conclut:

$$|R_n| \leq H . u_{n+1} \qquad (R_n \text{ reste de la série } \theta_n u_n)$$

21e leçon (fini ou infini)

Notion de fonction. Soit un ensemble de ~~valeurs~~ grandeurs (nombres réels ou imaginaires) : $x_1\ x_2 \ldots\ x_n \ldots$
et un autre ensemble de ~~valeurs~~ grandeurs $y_1\ y_2 \ldots\ y_n \ldots$
qui correspondent respectivement aux premières ; on conçoit les premières comme les valeurs d'une variable x, les secondes comme celles d'une autre variable y : la correspondance définit y comme fonction de x (1).
La fonction est dite uniforme si à une même valeur de x correspond une seule et même valeur de y.
– Une même correspondance définit 2 fonctions inverses l'une de l'autre. L'une peut être uniforme sans l'autre (Exemple : $\sin x$ est uniforme ; $\arcsin x$ ne l'est pas).
On définit de même des fonctions à plusieurs variables : à chaque groupe de valeurs $(x,\ y,\ z,)$ correspond une (ou plusieurs) valeur de la fonction.
Au fond, une fonction à plusieurs variables peut être fonction d'une seule grandeur variable représentée par plusieurs nombres associés qui en sont les coordonnées.
Ainsi, par ex. on ~~définit~~ considère souvent comme fonctions de 2 variables réelles $x,\ y$ les fonctions d'une variable complexe $z = x + yi$. Les deux points de vue peuvent avoir leurs avantages ; mais, en réalité, l'accouplement de x et de y n'est pas fortuit, non plus que celui des 2 fonctions réelles artificiel ou
$X(x,y) + i\,Y(x,y)$ qui composent la fonction complexe.
Chacune d'elles est une grandeur à 2 dim. unique.

---

(1) L'idée essentielle et fondamentale n'est pas celle de variations, mais de correspondance ; elle est statique, non cinétique

Quand l'ensemble des valeurs de la variable indépendante et celui des valeurs de la fonction sont tous deux finis, la correspondance peut être donnée empiriquement par l'énumération des valeurs correspondantes. Mais dès que l'un ou l'autre est infini, la correspondance ne peut être définie que par une loi générale. Une fonction peut donc exprimer ~~une~~ la loi de variation d'une grandeur en corrélation avec une autre.

Les lois les plus simples sont les lois algébriques, c.à.d. celles qui permettent de calculer la fonction au moyen de la variable par de simples opérations arithmétiques. Ces lois se représentent par des formules algébriques qui ne sont que des règles de calcul qu'il faut suivre. Elles engendrent les fonctions algébriques, les plus simples et les plus maniables de toutes. Mais, en principe, l'idée de fonction et la théorie générale des fonctions dépasse infiniment cette domaine du nombre et des opérations arithmétiques. Il ne faut pas s'attendre à ce que toute fonction se ramène aux fonctions algébriques, ni lui imposer d'avance cette condition extrêmement & arbitrairement restrictive (1) — Les éléments des fonctions algébriques sont les nombres réels et complexes, dont l'ensemble est le plus général qui puisse être soumis au calcul algébrique. Pour donner ~~à la~~ la théorie des fonctions algébriques toute sa généralité, on prendra cet ensemble pour base.

(1) Ce qui n'empêche pas qu'il y ait avantage à ~~réduire~~ ramener les fonctions à la forme algébrique, et qu'on doive y tendre.

Continuité de la variable indépendante: Quand l'ensemble des valeurs que prend la variable est continu.
Dans l'ensemble des nombres réels, c'est l'intervalle (a, b) ~~y compris ses limites~~ c.à.d. tous les nombres réels compris entre a et b, en y adjoignant ceux-ci: $a \leq x \leq$
Si a ou b est exclu, l'intervalle est semi-continu.
Dans l'ensemble des nombres complexes, définition de Cantor. Un ensemble continu à 2 dim. est figuré par une aire à contour simple, y compris tous les points du contour. Sinon, il n'est que semi-continu.
Continuité de la fonction. L'idée de ~~continuité~~ la variation continue d'une grandeur est une notion intuitive ou instinctive (comme celle de la continuité.) Elle suppose d'abord que la variable est continue; c.à.d. que la fonction est définie pour toutes les valeurs d'un ensemble continu. Elle implique, en outre, que si l'on fait tendre la variable x vers une de ses valeurs, x_0, la fonction $f(x) = y$ tend vers la valeur correspondante $y_0 = f(x_0)$, et cela, quelle que soit la suite $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ (prise dans l'ensemble des valeurs)
La condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu est que à tout nombre positif ε corresponde un autre nombre η tel que, pour toute valeur de x ~~vérifiant~~ appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité: $|x - x_0| < \eta$,
on ait l'inégalité: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
En d'autres termes, à une variation très petite (inf. pet.) de x doit correspondre une variation très petite de $f(x)$

Extension ~~du sens~~ de la notion de limite. On a défini la limite pour une suite $u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$ c.à.d. en somme pour une fonction définie pour toutes les valeurs entières de la variable. Ce n'est là qu'un cas très particulier.

Supposons que le point x_0 soit un point limite de l'ensemble des valeurs de x (qu'il appartienne ou non à cet ensemble). On dira que $f(x)$ tend vers la valeur y_0 quand x tend vers x_0, si à chaque nombre pos. ε correspond un nombre pos. η tel que, pour toute valeur de x appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité :

$$|x - x_0| < \eta,$$

on ait l'inégalité :

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Par hypothèse, la 1e inégalité peut toujours être vérifiée, si petit que soit η, puisque x_0 est un point-limite. La 2e inégalité montre que y_0 doit être un p. limite de l'ensemble des valeurs de la fonction (qu'il y appartienne ou non)

On exprime ce fait en disant que $f(x)$ a pour limite y_0 quand x a pour limite x_0, ou :

$$\lim f(x) = y_0 \quad \text{pour} \quad \lim x = x_0$$

ou simplement :

$$\lim_{x = x_0} f(x) = y_0.$$

On voit que la continuité de la fonction peut se définir comme suit : ~~il faut d'abord que~~ Une fonction est continue pour $x = x_0$ si elle a pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0. — Cela suppose qu'elle est définie pour x_0 et pour une infinité de valeurs voisines ; mais non pour un ensemble

continue de valeurs comprenant x_0. Cette nouvelle définition est donc plus générale que la première.
— Si la fonction $f(x)$ n'est pas définie pour $x = x_0$, (1) mais si elle a une limite y_0 pour $x = x_0$, on peut la définir par continuité en posant : $f(x_0) = y_0$.
En effet, elle sera alors continue en ce point.

~~Si une fonction est continue pour toutes les valeurs d'un ensemble continu,~~ Une fonction est ~~elle sera~~ continue dans tout un intervalle (ou une aire) ~~cet ensemble, ce qui veut dire (par définition)~~ lorsqu'à tout n. pos. ε correspond un autre n.o η tel que pour tout couple de valeurs x, x' appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité : $|x - x'| < \eta$,
on ait l'inégalité : $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Il est évident que une fonction continue dans un intervalle ~~champ~~ est continue pour toute valeur de cet intervalle ~~champ~~.
On démontre la réciproque (Tannery, § 77) :
Si une fonction est continue pour toutes les valeurs d'un certain intervalle ~~champ~~ (ens. continu) elle est continue dans cet int. ~~champ~~

Passage continu à la limite : $\lim x = x_0$ (Stolz)
x prend toutes les valeurs d'un intervalle $(x_0, x_0 \pm \delta)$ en ne passant d'une valeur à l'autre que par toutes les valeurs intermédiaires. Dans ces conditions, la fonction est continue si l'on a $\lim f(x) = f(x_0) = f(\lim x)$
Mais il ne suffit pas qu'on ait cela pour une seule suite de valeurs de x : Exemple. $\lim \sin \pi x = 0$ discontinue pour $x = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ (passage continu) mais $\sin \pi x$ oscille entre $+1$ et -1 pour $\lim x = \infty$
et on peut choisir une suite de val. telle que $\sin \pi x$ ait telle limite qu'on

(1) ce qui revient à dire que le point x_0 ne fait pas partie de l'ensemble des valeurs de la variable indépendante

Oscillation d'une fonction dans un champ. (1)
On considère l'ensemble des valeurs que la fonction prend dans ce champ (c. à d. corresp. à toutes les valeurs de ce champ) Cet ensemble (s'il est borné) a une limite supérieure L et une limite inférieure l : leur différence $(L - l)$ est l'oscillation de la fonction.

Principe général de convergence (Tannery, §79) :
Si à chaque nombre pos. ε correspond un n. pos. η tel que l'on ait : $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
pour toutes les valeurs x_1, x_2 appartenant à l'ensemble et vérifiant l'inégalité : $|x - x_0| < \eta$,
la fonction $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers x_0 par des valeurs appartenant à l'ensemble.
Remarque. Les règles de convergence des suites rentrent comme cas particulier dans ce principe.

Limites d'indétermination (Du Bois-Reymond) d'une fonction pour : $\lim x = a$. On considère l'ensemble des valeurs $|x - a| < \delta$; à cet ensemble correspondent des limites supérieure et inférieure de la fonction, L, l ; si l'on fait tendre δ vers 0, L et l tendent vers des limites respectives, S et I, lim. d'indétermination. (en effet, L, ne peut que diminuer, et l qu'augmenter, tout en restant bornées, donc elles ont des limites.)
Ces limites d'indétermination peuvent se définir ainsi : A tout nombre ε correspond un n. pos. η tel

(1) Il faudrait ici définir ce qu'on entend par limite infinie (pos. ou nég.) et ~~étendre~~ définir en conséquence l'oscillation infinie.

valeur de x telle que
que pour toute $|x-a|<\eta$,
on ait : $f(x) < S+\varepsilon$,
mais que ~~pour quelque valeur~~ ~~dans tout~~ intervalle (a, x_0) où : $|x_0-a|<\eta$
il y ait au moins une valeur x_1 pour laquelle on a :
$$f(x_1) > S-\varepsilon$$
De même, à tout n. ε correspond un n. pos η tel que
pour toute valeur de x telle que $|x-a|<\eta$,
on ait : $f(x) > I-\varepsilon$,
mais que, dans tout intervalle (a, x_0) où $|x_0-a|<\eta$
il y ait au moins une valeur x_1 pour laquelle on a
$$f(x_1) < I+\varepsilon.$$
La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction ~~soit continue~~ pour $x=a$ ~~ait une limite~~ est que : $S=I$.
car alors on a : ~~$f(x)$~~ $I-\varepsilon < f(x) < S+\varepsilon$
pour tout x tel que : $|x-a|<\eta$

Démonstration de cette définition. La limite supérieure I_1 est définie par la propriété suivante : Dans le domaine $|x-a|$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont $< I_1$; mais il y en a au moins une ~~supe~~ $> I_1-\varepsilon$.
D'autre part, la limite de indétermination S est la limite vers laquelle tend S quand η tend vers 0 : car que ~~η peut~~ pour η suffis. petit, $|I_1-S|<\varepsilon$
et comme $I_1 \geqq S$, $I_1 < S+\varepsilon$.
Donc, dans le domaine $|x-a|<\eta$, toutes les valeurs de $f(x)$ doivent être $< I_1 < S+\varepsilon$
mais si petit que soit η, il y en a toujours une qui est $> I_1-\varepsilon \geqq S-\varepsilon$ c. q. f. d.

On peut encore distinguer la limite de $f(x)$ pour $a+\varepsilon$, et la limite de $f(x)$ pour $a-\varepsilon$. On les désigne par : $f(a+0)$, $f(a-0)$.
Pour que $f(x)$ ait une limite pour $x=a$, il faut et il suffit que : $f(a+0) = f(a-0)$

Conséquences de la continuité des fonctions.
Si $f(x)$ est continue dans un ~~champ~~ intervalle, et si pour 2 valeurs de cet ~~champ~~ intervalle elle prend des signes contraires, elle s'annule pour une valeur intermédiaire de x. (Tannery § 84)
Corollaire : Soit une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b), et N un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$: il y a dans l'intervalle une ~~nombre~~ valeur x pour laquelle on a : $f(x) = N$.
En effet, la fonction $f(x) - N$ est continue dans l'intervalle et y change de signe. Donc elle s'annule dans l'int.
Énoncé vulgaire : Une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. (càd que la réciproque n'est pas vraie.)
Cette propriété ne caractérise pas les fonctions continues.
Si une fonction est continue dans un intervalle, elle y atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure : càd qu'il y a dans l'intervalle 2 valeurs pour lesquelles on a : $f(x_1) = L$, $f(x_2) = l$
Autre corollaire : Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et si $f(a) < \varphi(a)$, $f(b) > \varphi(b)$, il y a une valeur intermédiaire c où : $f(c) = \varphi(c)$.
Énoncé vulgaire : Une fonction continue ne peut changer de signe sans passer par zéro.

En particulier, une fonction croissante dans un intervalle (a, b) atteint sa lim. inf. en a et sa lim. sup. en b.

Remarque. Ce n'est là qu'une conséquence de ce théorème de la théorie des ensembles : Un ensemble borné et ~~parfait~~ continu contient ses limites supérieure et inférieure (puisqu'il contient tous ses points-limites, en tant que parfait.)

Applications à l'Algèbre

On établit que les fonctions algébriques, et en particulier les fonctions entières (polynomes entiers en x) sont continues.

Le 1er théorème donne lieu au corollaire suivant :

Lorsque 2 nombres a, b substitués dans la fonction $f(x)$ donnent des résultats de signes contraires, l'éq. : $f(x) = 0$ a au moins une racine comprise entre a et b.

C'est le principe de la séparation des racines, càd. de la résolution numérique des équations.

Le 2e théorème sert à démontrer le théorème fondamental de l'Algèbre : Toute équation algébrique a une racine (on se place dans l'ensemble des nombres complexes.)

En effet, on prouve que la valeur absolue d'une fonction entière de $z = x + iy$ a pour limite inférieure 0 : càd que si on lui assigne un minimum non nul, on peut trouver une valeur ~~en valeur~~ inférieure. Mais pour pouvoir affirmer que la fonction atteint cette limite inférieure (a effectivement pour minimum 0) il faut invoquer la continuité. Autrement, en effet, on pourrait imaginer qu'elle prend ~~une suite~~ de valeurs absolues indéfiniment décroissantes, ayant pour limite 0, sans que pour cela elle ~~puiss~~ doive prendre cette valeur-limite.

Ainsi le théorème fond. de l'Algèbre ~~et~~ par suite toute la théorie des équations, reposent sur une propriété analytique des fonct. algébriques sur la théorie des fonct.

22e leçon

On a étudié (20e leçon) les séries à termes constants : chacun d'eux est fixe et déterminé uniquement par son rang. On va maintenant étudier les séries à termes variables, c.à.d. dont les termes sont fonctions d'une ou plusieurs variables (les mêmes pour tous, et chacune ayant la même valeur en tous.) (1) En un mot, ce sont des séries de fonctions. On voit par là qu'on ne peut réduire des fonctions à des séries, puisque les termes des séries sont déjà des fonctions. Si l'on assigne aux variables une valeur déterminée, chaque terme prend une valeur fixe, et la série devient une série à termes constants, qui peut être convergente ou divergente. De même qu'une fonction (variable) représente une multitude (finie ou infinie) de valeurs constantes, de même une série à termes variables représente une multitude de séries à termes constants. Elle peut donc être convergente pour telle valeur et divergente pour telle autre.

– Convergence uniforme. Considérons une série de fonctions qui converge pour toutes les valeurs d'un intervalle donné. Cela veut dire que, pour chaque valeur de cet intervalle à ch. n. pos. ε correspond un nombre entier n tel que, pour tout $p > n$, on ait : $|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

---

(1) À un autre point de vue, on peut dire que dans une série à termes constants, le terme général u_n est une fonction du rang n, tandis que dans une série à termes variables il est fonction à la fois de x ($y, z, \dots$) et de n.

étant fixé ε

Or rien ne dit que ce nombre n soit le même pour toutes les valeurs de l'intervalle considéré : il peut croître indéfiniment, de telle sorte qu'on ne puisse lui assigner une limite supérieure N qui permette d'affirmer la ~~th~~ ~~déf~~ propriété précédente pour toute valeur de x.

On dit qu'une série de fonctions est uniformément convergente, ~~si~~ dans un intervalle donné, si ~~pour toute valeur de cet intervalle, on peut~~ à chaque n. pos. ε on peut faire correspondre un entier n tel que, pour tout p > n, on ait : $(u_{n+1} + \dots + u_{n+p}) < \varepsilon$

et cela, pour toutes les valeurs appart. à cet intervalle.

— Il peut arriver que tous les termes d'une série soient des fonctions continues (dans un intervalle), sans que la somme de la série soit elle-même une fonction continue (Tannery). Pour que cette hypothèse entraîne cette conclusion (dans le même intervalle), il faut y ajouter ~~cette~~ la condition de la convergence uniforme.

Théorème : Si une série dont les termes sont des fonctions continues de x dans un intervalle est, en outre, uniformément convergente dans cet intervalle, la somme de cette série est une fonction continue de x dans le même intervalle (Tannery, § 91.)

La réciproque n'est pas vraie : la somme de la série peut être une fonction continue dans l'intervalle, sans que la série soit uniformément convergente dans l'intervalle (Stolz).

— La convergence absolue se définit pour les séries de fonctions comme pour les séries à termes constants.

(1) N. B. C'est la définition la plus générale, celle de Darboux et de Dini, et non celle de M. Tannery d'après Weierstrass et Heine (v. note de la p. 133.)

Cette définition s'applique également aux séries à termes réels ou à termes complexes, en vertu du double sens (unique au fond) du mot : valeur absolue.

Les théorèmes précédents sont vrais pour toutes les séries de fonctions, quelles que soient ces fonctions. Par ex. pour les ~~fonctions~~ séries trigonométriques aussi bien que pour les séries de puissances. Il n'y a donc pas de raison pour réduire les séries de fonctions à des séries de puissances, si ce n'est que celles-ci sont plus simples et plus commodes.

Les séries de puissances (terme allemand) ou séries entières (terme français) sont celles dont les termes sont constitués par les puissances entières positives de la variable, multipliées par des coefficients constants, et rangées par ordre d'exposant croissant (1). On ne peut en effet faire abstraction a priori de leur ordre : on ne le peut que dans le cas de convergence absolue. C'est dans ce cas seulement qu'on peut les assimiler à des polynomes (d'un nombre infini de termes, ou infinitinomes.)

Sur les séries entières, deux théorèmes d'Abel :

I. Si pour $x = x_0$, tous les termes de la série entière :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

restent finis, c. à d. si pour tout n on a

$$|a_n x_0^n| < A,$$

la série est absolument convergente pour toute valeur de x dont la valeur absolue est inférieure à celle de x_0. (a fortiori, si la série est convergente pour $x = x_0$.)

---

(1) Il y a une différence entre les 2 définitions : une série entière à plus. variables comprend aussi les produits de leurs diverses puissances : $\Sigma x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$

~~En outre~~ Par conséquent, elle est abs. convergente à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ = r. Cercle et rayon de convergence

En outre, elle est ~~uniformément convergente~~ dans tout domaine ~~(ou intervalle)~~ intérieur au cercle de convergence (dans tout intervalle dont les limites sont en valeur absolue inférieures à r.)

II. Si pour $x = x_0$, la série entière est convergente la série est absolument et uniformément convergente dans tout domaine intérieur au cercle de rayon $|x_0|$ et ayant pour point-limite (ou frontière) le point x_0. (dans tout intervalle ayant pour limite le nombre x_0 et pour autre limite un nombre inf. en val. abs à x_0)

Il en résulte que la somme $\Sigma a_n x^n$ est une fonction continue de x à l'intérieur du cercle de convergence, et qu'elle a pour limite $\Sigma a_n x_0^n$ quand x tend vers x_0 par des valeurs intérieures à ce cercle (et non sur le contour).

Ainsi le rayon de convergence r est la limite supérieure des valeurs absolues des valeurs qui rendent la série convergente.

Ce rayon peut ~~prendre~~ avoir toutes les valeurs entre 0 et ∞.

Exemples de séries convergentes dans tout le plan :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1.2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$1 + \frac{x}{1^1} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

Exemples de séries partout divergentes (sauf pour $x = 0$)

$$1 + x + 2!\,x^2 + \dots + n!\,x^n + \dots$$

$$1 + x + 2^2 x^2 + \dots + n^n x^n + \dots$$

Pour les points de la circonférence du cercle de convergence on ne peut rien affirmer en général, même si l'on sait que la série est convergente en tous ces lieux (cas du 2e théorème d'Abel.)

Exemples (Méray § 118): La série:

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$ (absolument convergente pour $x = 1$.)

a pour rayon de convergence 1; elle converge sur tous les points de la circonférence (pour tout $|x| = 1$.)

La série: $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

a même rayon de convergence; elle converge en tous les points de la circonférence, sauf pour $x = +1$

La série: $$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

a même rayon de convergence; mais elle diverge en tous les points de la circonférence (où $|x| = 1$)

Application du 2e théorème d'Abel:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots$$

pour $|x| < 1$ Or la série est encore convergente pour $x = 1$; ~~elle~~ donc ~~elle est~~ la somme est une fonction continue pour $x = 1$. D'autre part $\log(1+x)$ est aussi une fonction continue pour $x = 1$; donc les 2 fonctions sont égales en ce point, et l'on peut écrire:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Au contraire, de ce que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ est une fn continue de x pour $x = -1$, on n'a pas le droit de conclure: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ parce que cette dernière série n'est pas convergente.

(Duhamel)

— Principe des limites; méthode des limites (base du Calcul infinitésimal: théorie des infiniment petits.)
Ces principes n'ont plus qu'un intérêt historique depuis que le Calcul infinitésimal est fondé sur la définition rigoureuse de la limite. (discontinue de valeurs)
On a défini la limite, d'abord pour une suite, puis pour une variable continue. On a démontré que:

$\lim(u+v) = \lim u + \lim v$ $\qquad \lim(uv) = \lim u . \lim v$

Autrement dit (si u, v, w sont des variables convergentes ou cont.)

Si: $u+v=w$, $\quad \lim u + \lim v = \lim w \qquad U + V = W$

Si: $uv = w$, $\quad \lim u \times \lim v = \lim w \qquad UV = W$

Conclure de la 1e relation (entre variables) à la 2e (entre valeurs constantes qui sont leurs limites respectives) c'est le fameux passage à la limite, tant contesté.
Plus généralement, si F désigne une fonction continue ~~entière~~ (donc

$\lim F(u, v, w, \dots) \begin{cases} = F(U, V, W \dots) \\ = F(\lim u, \lim v, \lim w, \dots) \end{cases}$

D'où ce théorème:
Si des variables sont continues, toute relation entière entre ces variables subsiste entre leurs limites.
— Définition: On appelle infiniment petite une variable qui a pour limite 0 (qui décroît indéfiniment).
Donc, en particulier, si l'on a: $\quad u = v + \varepsilon$

$\lim u = \lim v + \lim \varepsilon = \lim v + 0 = \lim v \ (V = \dots$

Ainsi, si 2 variables ont une différence inf. petite, leurs limites sont rigoureusement égales (puisqu'elles sont fixes).
~~D~~ C'est ce que signifie cet énoncé vulgaire mais inexact:
Une constante infiniment petite est identiquement nulle.
Cela veut dire que si la différence de 2 quantités fixes (l'on peut prouver que)

doit être plus petite que ~~toute~~ quantité donnée elle doit être identiquement nulle.

Dans le passage à la limite, càd dans la substitution des limites aux variables, on peut et on doit même négliger les infiniment petits; ~~et~~ on peut donc remplacer une variable par une autre qui en diffère infiniment peu. Il n'y a là aucune inexactitude, aucune équation imparfaite, aucune compensation d'erreurs (Carnot) mais un procédé absolument rigoureux, précis et sûr, du moment que l'on cherche à déduire de la relation qui existe entre les variables celle qui existe entre leurs limites.

Si le rapport de 2 grandeurs variables a pour limite 1, leur différence a pour limite 0, et réciproquement.

Si : $u = v + \varepsilon$ $\quad \frac{u}{v} = 1 + \frac{\varepsilon}{v}$ $\quad \lim \frac{u}{v} = 1.$

Si : $\lim \frac{u}{v} = 1,$ $\quad \frac{u}{v} = 1 + \varepsilon$ $\quad u = v + v\varepsilon$

$\lim u = \lim v.$

Infiniment petits de divers ordres.

Soient u, v deux inf. petits : ils sont de même ordre

Si : $\lim \frac{u}{v} = k$ (nombre fini)

u est d'ordre supérieur à v (inf. petit par rapport à v)

Si : $\lim \frac{u}{v} = 0$ (ou si : $\lim \frac{v}{u} = \infty$)

On choisit arbitrairement l'infiniment petit du 1er ordre (c'est généralement la variable indépendante x). On dit qu'une variable (fonction) y est un inf. petit du ne ordre si l'on a : $\lim \frac{y}{x^n} = k$ (nombre fini)

quel que soit le nombre réel positif n

On a par définition : ~~$\frac{y}{kx^n}$~~ $\frac{y}{kx^n} = 1 + \varepsilon$

ε étant infiniment petit. Donc :

$$y = kx^n + \varepsilon . kx^n$$

εkx^n étant inf. petit par rapport à kx^n, on appelle kx^n la partie principale de le inf. petit y. Quand on passe aux limites, on peut remplacer un infin. petit par sa partie principale.

– Les infiniment grands sont les inverses des infin. petits d'ordre correspondant (1)

Non-seulement il y a des inf. petits de tous les ordres réels (rationnels et irrationnels), mais il y en a d'ordres intermédiaires (voir Du Bois-Reymond)

Si $y = \frac{x^n}{\log x}$, $\lim \frac{y}{x^n} = \lim \frac{1}{\log x} = 0$,

Si $y = x^n \log x$, $\lim \frac{y}{x^n} = \lim . \log x = \infty$.

D'autre part, $x^\varepsilon \log x$ est inf. petit, si petit que soit $\varepsilon > 0$; de sorte que : $\lim \frac{y}{x^{n-\varepsilon}} = 0$, $\lim \frac{y}{x^{n+\varepsilon}} = \infty$.

De même, il y a des infiniment grands d'ordre infini : e^x est inf. grand par rapport à x^n, quelque soit n. Et des inf. petits d'ordre infini, comme $e^{-\frac{1}{x}}$

– La somme de plusieurs inf. petits est un inf. petit de l'ordre le moins élevé de tous.

Le produit de plusieurs inf. petits a pour ordre la somme des ordres des facteurs.

---

(1) On peut les considérer comme des infiniment petits d'ordre négatif, par la convention des exposants négatifs.

23e leçon

On a intérêt à étudier la variation des fonctions ; on conçoit qu'une fonction (d'une variable réelle) varie plus ou moins vite qu'une autre, c.à.d. éprouve une plus grande variation pour une même variation de la variable indépendante. La vitesse de variation d'une fonction est donc une grandeur variable, elle aussi, et qu'il importe de déterminer en fonction de la variable indépendante. Cette notion de vitesse n'implique pas le temps ; mais on peut la ~~impliquer~~ figurer dans le temps, en imaginant que la variable indépendante varie uniformément dans le temps (c.à.d. de quantités égales en des temps égaux ou de quantités proportionnelles au temps) et en cherchant comment la vitesse de la fonction varie simultanément (fluxion de Newton.)

[Remarque Il y a là une sorte de cercle vicieux, à la rigueur, puisque l'on attribue à la variable indép. une vitesse uniforme, c.à.d. une fluxion constante. Il vaut donc mieux rapporter directement la fonction à sa variable, sans l'intermédiaire du temps.]

Soit x la variable, y la fonction : la dépendance de l'une à l'autre s'exprime par : $y = f(x)$.

On désigne les valeurs correspondantes par le même indice. Pour comparer les accroissements correspondants, c.à.d. étudier la variation de la fonction, on considère le rapport :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ce rapport est la vitesse moyenne de variation de la fonction dans l'intervalle (x_0, x_1). ~~On conçoit~~ Plus cet intervalle est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse vraie ; on est ainsi amené à concevoir la vitesse à chaque instant ou en chaque point, c.à.d. pour chaque valeur x_0 de x. Cette valeur sera la limite du rapport $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, quand x_1 tend d'une manière continue vers x_0.

Cette limite, si elle existe, est la dérivée de $f(x)$ au point (pour la valeur) x_0. On représente les accroissements par Δx, Δy : $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

~~Définition~~

On représente aussi Δx par h : $x_1 = x_0 + h$;

$y_0 = f(x_0)$ $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$: le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient : $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Définition précise et rigoureuse :

Une fonction $f(x)$ définie ~~pour la valeur~~ dans un intervalle continu qui contient x_0 a une dérivée X pour x_0, si à chaque nombre pos. ε correspond un autre n. pos. η, tel que sous la condition :

$$0 < |h| < \eta,$$

on ait :

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - X\right| < \varepsilon.$$

Cette dérivée se désigne par $y_0' = f'(x_0)$; ou par : $D_x f(x)$ — Ou encore par : $\frac{dy}{dx}$, symbole qui rappelle $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Toutes les difficultés & les paradoxes du Calcul infinitésimal viennent de cette notation : on s'est demandé comment le rapport de 2 quantités

nulles peut être une quantité déterminée. Il suffit de dire que $\frac{dy}{dx}$ n'est pas un rapport, mais la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bien déterminé, puisque Δx et Δy ~~sont~~ différents de zéro. Ce sont des inf. petits dans le sens qu'ils ont pour limite zéro, et non des inf. petits actuels ou fixes, ce qui est absurde (1)

~~La définition de la dérivée~~ Pour que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ait une limite, il faut évidemment que Δy et Δx aient pour limite 0 ; mais cela ne suffit pas. En d'autres termes : Pour que la fonction ait une dérivée $f'(x_0)$, il faut qu'elle soit continue pour x_0 ; mais cela ne suffit pas. Une fonction qui a une dérivée est nécessairement continue ; mais une fonction continue peut n'avoir pas de dérivée. +

La dérivée $f'(x_0)$ peut exister et être définie pour un ensemble de valeurs de x, fini ou infini, discontinu ou continu. C'est une nouvelle fonction de x : elle (mais toujours contenu dans l'ensemble où $f(x)$ est défini) peut être continue et même avoir une dérivée : $f''(x)$, qui sera la dérivée seconde de $f(x)$. Et ainsi de suite. Mais à chaque dérivation, l'ensemble des valeurs de x où la dérivée est définie peut diminuer ; ~~la~~ chaque dérivée peut cesser d'être continue, à plus forte raison d'avoir une dérivée.

---

(1) Ce qui permet de traiter $\frac{dy}{dx}$ comme un rapport, c'est que la fonction inverse a pour dérivée $\frac{1}{f'(x)} = \frac{dx}{dy}$.

Par exemple, une fonction constante dans un intervalle a une dérivée nulle dans cet intervalle : car $\Delta y = 0$.
Une fonction constante dans tout intervalle a une dérivée constamment nulle. Or une dérivée constamment nulle n'a pas de dérivée (sa dérivée est constamment nulle.)

C'est ce qui arrive aux fonctions entières : un polynôme de degré n a n dérivées non nulles ; la n^e est const. donc la $(n+1)^e$ est nulle.

Soit $f(x)$ un polynôme de degré n : si l'on donne à x_0 l'accroissement h, on peut développer chaque terme $(x+$ suivant la formule du binôme et ordonner suivant les puissances de h (la variable) ; les coefficients seront des polynômes en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f_1(x_0)\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} f_2(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f_n($$

Or en ~~tire~~ conclut :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_1(x_0) + \frac{h}{2!} f_2(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f_n($$

Les 2 membres étant des fonctions continues de h, ont même limite pour $h = 0$: or le 1er a pour lim. $f'($ le 2e a pour lim. $f_1(x_0)$: donc

$$f_1(x_0) = f'(x_0)$$

De même ~~on prouverait que~~ ~~si l'on savait d'avance que~~ ~~$f(x_0)$ a des dérivées d'ordres supérieurs, on~~ peut démontrer que (~~Stolz, III, 4~~) :

$$f_2(x_0) = f''(x_0)$$

$$f_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Si ~~l'on~~ $f(x)$ est une série entière en x, (convergente) absolument pour tout $|x| < a$, on pourra la développer, par la même méthode, en série entière en h, pour tout $|h| < a - |x_0|$ chaque coefficient de h étant une série entière abs. convergente en x dans le même cercle que $f(x)$. La série entière en h est

En particulier, la dérivée de x^n est le coefficient de h dans le développement du binôme $(x+h)^n$, soit : nx^{n-1}.

par suite, une fonction continue de la variable h ;
on démontre, comme plus haut, que :

$$f_1(x_0) = f'(x_0), \dots\dots \quad f_n(x_0) = f^{(n)}(x_0), \dots$$

Mais il faut bien remarquer que cette identification suppose préalablement définies les dérivées successives de $f(x)$; elle ne peut donc leur servir de définition. De plus elle suppose que la fonction est définie par une série ou développable en série dans un cercle de convergence. Or si une fonction est définie par une série, elle a des dérivées (qui sont des séries ayant même cercle de convergence). Mais la réciproque n'est pas vrai : une fonction peut avoir une ou plusieurs dérivées, ou même une infinité, sans être développable en série. ~~On ne peut donc pas définir d'une manière générale les dérivées de f(x) comme les coefficients des puissances de h dans le développement de f(x+h).~~
— C'est ce que prouve la théorie de la série de Taylor : Si une fonction $f(x)$ est continue, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, dans tout l'intervalle (a, b), et si sa n^e dérivée existe ~~pour~~ à l'intérieur de cet intervalle on peut écrire :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h)$$

x et $(x+h)$ appartenant à l'intervalle (a, b), et θ étant un nombre réel compris entre 0 et 1.

Le dernier terme s'appelle terme complémentaire ou reste de la série : on le désignera par R_n (~~x~~).
Si les conditions énoncées sont vérifiées quel que soit n (càd si $f(x)$ a des dérivées finies et continues de tout ordre) la série pourra être prolongée indéfiniment : or elle est toujours égale à : $f(x+h) - R_n$.
Donc, pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit que R_n ait une limite finie pour n infini.
Mais pour qu'elle ait pour limite $f(x+h)$ il faut et il suffit que R_n ait pour limite 0. Cette condition est évidemment plus restreinte que la précédente.
Ainsi, non seulement une fonction peut être continue mais elle peut avoir toutes ses dérivées finies et continues dans un intervalle pour $x = a$ sans pour cela être développable en série suivant les puissances de $(x-a)$, si voisin que x soit de [intérieur de]
Cauchy a remarqué (le premier) que la série de Taylor peut être convergente dans tout un intervalle contenant la valeur $(x+h)$, sans avoir pour limite $f(x+h)$.
Exemple : la fonction : $e^{-\frac{1}{x^2}}$ (v. Stolz, III, 8)
Aussi, de ce qu'on peut développer $f(x+h)$ en série de puissances de h, on ne peut pas conclure que les coefficients du développement sont les dérivées de $f(x)$.
Il faut savoir ~~d'abord~~ au préalable que la fonction a toutes ses dérivées finies et continues. Alors, mais alors seulement, en vertu de l'unicité du développement en série, on peut identifier les coefficients correspondants (v. Stolz, III, 4.)

Autrement, on ne peut faire l'identification que pour le 1er coefficient, qui est toujours égal à la dérivée première, comme on l'a démontré précédemment. Mais si l'on a pu déterminer les dérivées d'une fonction entière ou d'une série entière au moyen du développement suivant les puissances de h, c'est parce qu'on savait d'avance que les dérivées existaient.
En résumé, on ne peut pas définir d'une manière générale les dérivées de $f(x)$ comme les coefficients ~~de $f(x+h)$~~ des puissances de h dans le développement de $f(x+h)$.

Conditions nécessaires et suffisantes pour que la série de Taylor ait pour somme la fonction génératrice (1)

1° La fonction $f(x)$ doit être finie et continue ainsi que ses dérivées de tout ordre pour $|x-a| \leq R$

2° La série de Taylor doit être convergente pour toute valeur de x telle que $|x-a| < R$
et pour toute valeur de h telle que $|h| < R - |x-a|$.

3° La série, considérée comme fonction de x (h const) doit être continue et différentiable par termes, dans tous les cas où: $|x-a| + |h| < R$.

4° La somme de la série et sa dérivée partielle par rapport à x (ou par rapp. à h) doivent être des fonctions continues de x et de h pour toutes les valeurs qui satisfont l'inégalité: $|x-a| + |h| < R$.

(1) König, ap. Stolz, III, 8.

Théorème de Cauchy (pour les variables complexes) :
Si la fonction $f(x)$ est uniforme et continue dans le cercle de centre a et de rayon R ; si la fraction :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

où x est un point quelconque intérieur au cercle de ~~rayon~~ centre x_0 et de rayon $\delta < R - |x_0|$, a pour limite $(f'(x_0))$ pour $\lim x = x_0$; et si la fonction $f(x)$ est continue dans le intérieur du 1er cercle, $f(x)$ est développable en série de Taylor suivant les puissances de $(x-a)$ à l'intérieur du même cercle, c.à.d. que pour tout $|x-a| < R$, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \dots$$

Exemples de fonctions continues sans dérivée :

1° $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ pour $x \gtrless 0$, ~~f(x)~~ $f(0) = 0$.

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{\pi}{x}$ a pour $\lim x = 0$ les limites d'indétermination $+1, -1$.

2° $f(x) = \sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{x}}$ Les racines de l'éq : $\sin \frac{\pi}{x} =$ sont : $x = \frac{1}{n}$.

On pose : $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{n}) = 0$.

f est uniforme et continue ~~aux points~~ dans tout intervalle (-
et pourtant n'a pas de dérivée aux points 0 et $\frac{1}{n}$.

3° Weierstrass a trouvé une fonction uniforme et continue qui n'a de dérivée pour aucune valeur de l'argument

$\sum a^n \cos(b^n \pi x)$ $0 < a < 1$, b nombre impair $>$ 1
$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Par suite, cette fonction n'est pas développable en série en un seul point.

24e leçon

Une fonction représentant une loi de variation, sa dérivée représente la vitesse de variation, en chaque point, et la fonction dérivée représente la loi suivant laquelle varie cette vitesse. On peut se poser le problème inverse : Étant donné la vitesse de variation en chaque point, reconstituer la loi de variation ; en particulier, étant donné la vitesse d'un mobile à chaque instant, trouver son mouvement. C'est le problème inverse de celui du calcul des dérivées : trouver la fonction primitive d'une fonction donnée, c. à d. celle dont elle ~~serait~~ peut être la dérivée. C'est ce qu'on appelle intégrer une fonction. Toute fonction ne peut pas être considérée comme la dérivée d'une autre ; toute fonction n'est pas intégrable. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégrabilité d'une fonction.
— Pour se faire une idée approximative et grossière de l'allure de la fonction primitive cherchée ou supposée, on peut employer les mêmes considérations qui ont amené à la ~~conception~~ définition de la dérivée. Celle-ci a été conçue comme $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

En vertu du théorème des accroissements finis, si $f'(x)$ existe dans l'intervalle $(x, x+h)$, on peut écrire :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h) \qquad 0 < \theta < 1.$$

c. à d. que le rapport de l'accroissement fini de la fonction

à l'accroissement fini de la variable est égale à une des valeurs que prend $f'(x)$ dans le intervalle (x_0, x_0+h) (1)
– Or, à présent, nous connaissons seulement $f'(x)$, et nous voulons connaître l'accroissement fini de la fonction primitive. ~~Supposons provisoirement~~

Supposons provisoirement que la fonction donnée $f'(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b). On sait que (autre forme): $f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi) \quad a < \xi < b$.
Si l'on connaissait ξ, on aurait exactement: $f(b) - f(a)$.
Si l'on prend une autre valeur de ~~f~~ $f'(x)$, elle différera d'autant moins de $f'(\xi)$ que x diffère moins de ξ, càd est ~~contenu~~ indéterminé dans un plus petit intervalle. On divisera donc l'intervalle (a, b) en n autres par les valeurs: $a_1\ a_2 \dots\ a_{n-1}$ $(a = a_0, \quad b = a_n)$
On prendra dans chacun d'eux une valeur de $f'(x)$ ad libitum, soit: $f_1\ f_2 \dots\ f_n$.
et l'on formera la somme:

$$(a_1 - a_0) f_1 + (a_2 - a_1) f_2 + \dots + (a_n - a_{n-1}) f_n .$$

Le 1er terme diffère peu de $f(a_1) - f(a_0)$;
le 2e ——————— $f(a_2) - f(a_1)$;

le ne ——————— $f(a_n) - f(a_{n-1})$.
Donc la somme représentera approximativement la différence $f(b) - f(a)$.
En d'autres termes, en prenant des intervalles (de temps) de plus en plus courts, la vitesse à un instant quelconque de chaque intervalle approche de plus en plus de la vitesse

---

(1) Remarque: $f'(x + \theta h)$ est la vitesse moyenne dans l'intervalle $(x, x+h)$ d'étendue h, et elle correspond à une valeur intermédiaire de cet intervalle.

moyenne dans cet intervalle, et par suite, le produit de cette vitesse par la longueur de l'intervalle est d'autant plus voisin de l'espace parcouru, de la variation réelle de la fonction primitive.

On conçoit donc que, si cette f. primitive existe, la somme $\Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k$ doit avoir une limite, quand les intervalles décroissent indéfiniment, et que cette limite doit être la variation $f(b) - f(a)$.

D'où la définition de l'intégrale définie :

Une fonction $f(x)$, finie (non continue) dans l'intervalle (a, b), est intégrable dans cet intervalle si, quand on partage l'intervalle en intervalles partiels

$$(a, a_1) \quad (a_1, a_2) \quad \ldots\ldots \quad (a_{n-1}, b)$$

d'étendue infiniment petite, et qu'on prend dans chacun d'eux une valeur quelconque de $f(x)$:

$$f_1 \quad f_2 \quad \ldots\ldots \quad f_n$$

la somme $\Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k$ a une limite J.

Plus précisément : si à chaque nombre positif ε correspond un nombre pos. η, tel que la ~~somme~~ différence $|\Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k - J|$ soit plus petite que ε, pourvu que tous les intervalles soient plus petits que η. (leur somme restant toujours égale à $b-a$)

La limite J ainsi définie s'appelle l'intégrale définie de $f(x)$ entre les limites (bornes) a et b.

Si cette limite existe, on l'obtiendra en particulier en prenant tous les intervalles égaux à Δx ~~on aura~~ et en formant la somme : $f(x)\Delta x + f(x+\Delta x)\Delta x + \ldots + f(x+(n-1)\Delta x)\Delta x$

ou : $\Delta x\left[f(x) + f(x+\Delta x) + \ldots + f(x+(n-1)\Delta x)\right]$

Pour rappeler l'origine de l'intégrale, à savoir une somme de termes obtenus en multipliant chaque ~~intervalle~~ accroissement inf. petit dx de la variable par la valeur corresp. de la fonction, on l'écrit : $\int_a^b f(x)\,dx$.

Reste à trouver la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale définie existe. On va en donner plusieurs énoncés équivalents, mais plus simples les uns que les autres, ~~et~~ les derniers impliquant les premiers.

~~I. Pour que la fonction~~ Pour que la limite I existe, il faut ~~et il suffit~~ que si l'on décompose de deux manières différentes l'intervalle (a, b) en intervalles partiels tous inférieurs à η, la différence entre les deux sommes correspondantes soit moindre que ε. On démontre que cette condition est suffisante : donc

I. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à ch. n. pos. ε corresponde un n. pos. η tel que la différence entre deux sommes relatives à 2 modes de décomposition soit plus petite que ε pourvu que dans les 2 modes les intervalles partiels soient tous plus petits que η.

Remarque. C'est ici, comme partout, la condition de convergence substituée à l'existence de la limite, et équivalant logiquement à celle-ci.

— La somme $\Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k$ est indéterminée dans une certaine mesure, puisque f_k est une valeur quelconque de $f(x)$ dans l'intervalle ~~(a_k, a_{k-1})~~ (a_{k-1}, a_k). Soit m_k la limite inférieure (le minimum) de $f(x)$ dans cet intervalle, M_k sa limite supérieure (son maximum). On a évidemment

$$\Sigma(a_k - a_{k-1}) m_k < \Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k < \Sigma(a_k - a_{k-1}) M_k$$

(a fortiori : $(b-a) m < \Sigma(a_k - a_{k-1}) f_k < (b-a) M$

m et M ~~étant~~ les lim. inf. et sup. de f dans l'intervalle

Posons pour abréger : (pour un certain mode de décomposition.) $\sum (a_k - a_{k-1}) m_k = s$. (somme inférieure)
$\sum (a_k - a_{k-1}) M_k = S$. (somme supérieure)
Toutes les sommes possibles pour un même mode de décomposition, sont comprises entre S et s ; par conséquent, il faut que $S - s$ soit plus petit que ε. (et comprennent S et s)
On démontre que la condition est suffisante. Donc :
II. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque n. pos. ε corresponde un n. pos. η tel que, pour tout mode de décomposition où les intervalles partiels sont tous $< \eta$, on ait : $S - s < \varepsilon$.
Remarque. Cette condition est plus simple que la 1e, car on n'y considère qu'un mode de décomposition à la fois, au lieu d'avoir à en comparer deux.
On peut encore la réduire et la simplifier :
III. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque n. pos. ε corresponde un certain mode de décomposition tel que $S - s < \varepsilon$.
On n'a plus qu'à considérer qu'un seul mode, au lieu d'une infinité simple comme dans II, et d'une infinité double comme dans III.
Cette dernière forme de la condition est due à Riemann.
De cette 3e forme (ou de la 2e) on déduit les deux théorèmes suivants :
Une fonction continue ds un int. est intégrable ds cet int.
Une fonction croissante ds un int. est intégrable ds cet int.
Remarquer que la continuité est une condition suffisante mais non nécessaire, de intégrabilité.

On s'en rend compte aisément.

Posons : $\delta_k = M_k - m_k$

c'est l'oscillation de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_{k-1}, a_k). $S - s = \Sigma (a_k - a_{k-1}) \delta_k$.

Or, si la fonction est continue dans l'intervalle (a, b), son oscillation dans chaque intervalle inférieur à η sera plus petite que ε : donc $S - s < \Sigma (a_k - a_{k-1}) \varepsilon = (b-a)\varepsilon$.

$(b-a)$ étant fini et fixe, $S - s$ tend vers 0 comme ε.

D'autre part, pour que la condition (III) soit remplie, il faut et il suffit que $(S-s)$ ait pour limite 0 quand η décroît indéfiniment, c.à d. que

$$\lim \Sigma (a_k - a_{k-1}) \delta_k = 0$$

Or, pour cela, il n'est pas nécessaire que l'oscillation δ_k décroisse indéfiniment dans tous les intervalles, puisque leur étendue à chacun décroît aussi indéfiniment ; il suffit que l'étendue totale de ceux où l'oscillation δ_k reste finie décroisse elle-même indéfiniment (ait pour limite 0.) et cela, en vertu de (III) pour un seul mode de décomposition particulier. Donc :

IV Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit qu'à chaque couple de n. pos. ε, α, corresponde un certain mode de décomposition tel que l'ensemble des intervalles où l'oscillation est au moins égale à ε ~~soit~~ ait une étendue inférieure à α.

Ainsi la fonction $f(x)$ peut être discontinue sans cesser d'être intégrable, pourvu que les intervalles où se produisent ces discontinuités aient une étendue inf. petite

Par exemple, elle peut être discontinue pour un nombre fini de valeurs de x, et même pour un ensemble infini d'étendue nulle.

Théorème de M. Darboux : Les sommes inf. et sup. tendent toujours vers une limite déterminée, quand tous les intervalles chacun tendent vers 0.

La condition précédente : $\lim (S - s) = 0$,
équivaut donc à celle-ci : $\lim S = \lim s$.

Ces limites s'appellent resp. l'intégrale par excès et l'intégrale par défaut de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Elles existent pour toute fonction finie de l'intervalle. D'où une nouvelle forme de la condition :

V. Pour que la fonction soit intégrable, il faut et il suffit que ses intégrales par défaut et par excès soient égales : $\lim \Sigma_1 (a_k - a_{k-1}) M_k = \lim \Sigma_1 (a_k - a_{k-1}) m_k$.

— L'intégrale définie : $\int_a^b f(x) dx$

est une grandeur fixe, représentée par un nombre constant. Elle dépend, d'abord de la fonction intégrée, ensuite des deux limites (bornes) d'intégration, a, b. Si à b on substitue la variable x, la grandeur variable :

une fonction $\int_a^x f(x) dx$

sera définie dans tout l'intervalle (a, b). Pour $x = 0$, on la suppose nulle. Pour ne pas confondre la variable x dont elle dépend avec la variable de intégration qui figure dans $f(x) dx$, on désignera celle-ci par ξ.

Ainsi : $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$.

Cette fonction F est finie et continue dans l'intervalle $(a, b.)$ En effet 1° elle est comprise entre $m(x-a)$ et $M(x-a)$, M et m étant les lim. sup. et inf. de $f(x)$ dans l'intervalle $(a, b.)$

2° $$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi < Mh$$

qui tend vers 0 avec h.

Enfin, si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), elle est la dérivée de $F(x)$ dans cet intervalle. Car :

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Or : $$m' < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi < M'.$$

D'autre part : $$m' < f(x_0) < M'.$$

Mais, si $f(x)$ est continue, ses lim. sup. et inf. M', m' dans l'intervalle $(x, x+h)$ ~~tendant vers~~ ont une différence qui tend vers 0 avec h (son oscillation est infiniment petite.)

Par conséquent, ~~les 2 grandeurs $f(x_0)$ et $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi$ finies ayant une~~ la différence : $$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi - f(x_0)$$

tend vers 0 avec h ;

donc : $$~~\lim~~ \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi = f(x_0)$$

c. à d. : $$\lim \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

ce qui est la définition de la dérivée : $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ainsi la fonction primitive de la fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) est l'intégrale définie :

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

qui est une fonction finie et continue de sa lim. sup. x dans le même intervalle.

C'est une fonction primitive. Est-ce la seule ?
Toute fonction $\Phi(x)$ qui a pour dérivée $f(x)$ ne peut différer de $F(x)$ que par une constante. En effet, la fonction $\Phi(x) - F(x)$ a sa dérivée constamment nulle ; donc elle est constante, et l'on a.

$$\Phi(x) = F(x) + C^{te}$$

~~Inversement~~ Réciproquement si $\Phi(x) = F(x) + C^{te}$, $\Phi'(x) = F'(x)$, la dérivée d'une const. étant nulle.
Donc toute fonction qui a pour dérivée $f(x)$ est de la forme:

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi + C^{te}$$

et pour avoir toutes les fonctions primitives de $f(x)$, il suffit de donner à la Cte toutes les valeurs possibles.
Mais si l'on a: $\Phi(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi + C$,
on doit avoir, pour $x = a$: $\Phi(a) = C$.
Donc:

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Ainsi, pour évaluer une intégrale définie, il suffit de connaître une fonction primitive qcque de $f(x)$, et de prendre la différence de ses valeurs pour la limite supe et pr la lim. inf. de l'intégrale.
Il va sans dire que cette différence est la même pour toutes les fonctions primitives, puisqu'elles ne diffèrent que par des constantes qui disparaissent dans la soustraction.
L'invention d'une fonction primitive de $f(x)$ s'appelle intégration indéfinie; ~~et~~ cette fonction s'appelle <u>intégrale indéfinie</u> de $f(x)$ et s'écrit: $\int f(x)\,dx$
<u>sans limites</u>.

C'est que en effet elle n'est déterminée qu'à une constante près, constante qui correspond au choix de la lim. inférieure à partir de laquelle on intègre. La lim. supérieure, sous-entendue, est la variable x. En somme, l'intégrale indéfinie est l'intégrale définie $\int_a^x$ dont la lim. sup. est variable, et la lim. inf. fixe, mais arbitraire et indéterminée.

— On a tourné dans une sorte de cercle : on a défini la fonction primitive de $f(x)$ au moyen de l'intégrale définie, et l'on détermine l'intégrale définie au moyen de l'intégrale indéfinie. Ce n'est pas un cercle vicieux, car dans le 1er cas il s'agit de définir théoriquement la fonction primitive, ou plutôt ses conditions d'existence ; et dans le 2e cas, de l'évaluer pratiquement. Or, sauf quelques cas exceptionnels, il est impossible d'évaluer ~~directement la limite~~ l'intégrale définie comme limite d'une ~~somme~~ d'éléments inf. petits ; on est obligé de recourir par un détour à l'intégrale indéfinie, parce que l'on connaît, par des règles générales de la dérivation, les fonctions primitives des fonctions usuelles (auxquelles on s'efforce de ramener les autres.) Mais il peut arriver que les fonctions primitives de certaines fonctions (connues) soient des fonctions inconnues, inexprimables ~~algébriquement~~ algébriquement (fonctions elliptiques par ex.) Aussi le Calcul intégral est-il l'origine d'une foule de fonctions, en général transcendantes, ce qui prouve bien que les fonctions algébriques ne sont pas l'élément essentiel de l'Analyse, et que le caractère d'algébrique est en somme secondaire et accidentel dans la th. des fonctions.

25e leçon

Conclusions. L'objet du cours est de déterminer les relations des idées de nombre, d'ordre et de grandeur au moyen de l'étude des sciences fondées sur ces idées.

I Les mathématiciens modernes ~~veut~~ prétendent que l'idée de nombre est l'unique base des Math. pures. Pour cela, ils sont obligés de recourir à la généralisation arithmétique ou algébrique du nombre. Or, d'une part, la création du nombre irrationnel ne se justifie que par la considération de la continuité, donc de la grandeur ; d'autre part, la généralisation algébrique n'aboutit qu'à l'ensemble des nombres algébriques, qui n'est pas continu. De toute façon, il est donc impossible de construire le continu avec des nombres.

D'ailleurs, même en admettant que ce fût possible, cette construction ne reposerait pas sur la seule idée de nombre, mais aussi sur l'idée d'ordre. En effet, pour construire le continu numérique, il ne suffit pas d'avoir un ensemble de nombres (réels) ; il faut encore les ranger dans un ~~certain~~ ordre déterminé, pour intercaler les nombres irrationnels parmi les nombres rationnels. Or cet ordre est étranger aux considérations de l'Algèbre pure, sans laquelle il n'y a pas de continuité.

M. Molk dit : « L'idée de continuité géométrique doit nous être d'autant plus étrangère, que nous grouperons les nombres, non d'après leur grandeur, mais d'après leurs propriétés algébriques » à savoir en tant qu'ils vérifient la même équation.

Ainsi la construction du continu numérique fait appel au moins à l'idée d'ordre. Mais quel est le substratum de cet ordre ? Pour ranger les nombres, il faut les placer quelque part. Il faut un support intuitif pour cet ordre, et ce support ne peut être que continu : il semble bien que ce soit la grandeur. D'ailleurs l'idée de grandeur se trouve impliquée déjà dans ce projet, de ranger les nombres par ordre de grandeur. Donc la construction du continu numérique invoque les idées d'ordre et de grandeur.

– Le nombre lui-même, l'en. pur, ci-dessus, exige un contenu ou un support intuitif. En effet, on a vu que les premières vérités arithmétiques sont synthétiques, donc intuitives. Par ex : 2+1=3, 3+1=4, etc. sont des synthèses primitives. La constitution du nombre est une synthèse, réunissant plusieurs unités dans une idée. Or, pour ~~multiplier~~ répéter ainsi l'unité, l'extérioriser par rapport à elle-même, il faut l'attacher à une matière ; l'appliquer à une diversité, où l'on puisse distinguer plusieurs unités. Quelle est cette diversité ?

Ce n'est pas l'espace : car on peut dénombrer des choses inétendues, des objets idéaux et moraux (par ex. les 3 idées de n. d'o. et de g. dont nous nous occupons.) Ce n'est pas non plus le temps (Kant), bien que toute pensée soit soumise au temps comme forme de toute la ~~[illegible]~~ conscience (sens interne et externe.) En effet, 1° la succession n'est pas nécessaire au dénombrement : on dénombre d'un coup d'œil les collections peu nombreuses

2° le dénombrement, même successif, ne fait pas entrer la notion de temps dans le nombre : car le nombre est le résultat de la synthèse simultanée qui résume le dénombrement. 3° Enfin le nombre est en soi indépendant du dénombrement, du mode employé : le temps peut être une condition ~~empirique~~ du dénombrement (comme de toute opération mentale : raisonnement) sans être impliqué dans le nombre.

La seule condition intuitive du nombre est donc une multiplicité homogène et purement intelligible, qui serve de matière aux unités constituantes.
D'autre part, il est indépendant de l'idée d'ordre : il n'implique aucun ordre entre les unités, et le dénombrement non plus n'exige pas un ordre. (C'est la raison véritable de l'invariance du nombre cardinal.)

II. Mais l'idée d'ordre exige aussi le même substratum. En effet, l'idée d'ordre, comme celle de nombre implique ~~des~~ l'unités, et même une pluralité d'unités ; elle implique donc le nombre.(1) Mais elle représente une autre face de la collection. Le nombre cardinal est plus abstrait que l'ordre : car on y fait abstraction de l'ordre, tandis que dans l'ordre on ne peut faire abstraction du nombre.(2) L'idée d'ordre n'implique pas nécessairement l'espace (on peut ordonner des choses inétendues et étrangères à l'espace, des idées) ni le temps, bien que ~~et~~ la succession soit un certain ordre et pour ainsi dire le prototype de l'ordre. On distingue

(1) Mais elle en diffère, puisqu'une même collection n'a qu'un seul nombre, et comporte plusieurs ordres. Deux permutations diffèrent par l'ordre, et non par le nombre.

en effet un ordre même dans les objets simultanés. Et puis, on conçoit l'ordre circulaire ~~tandis~~ ou périodique tandis que le temps est un ordre linéaire indéfini. L'ordre est réversible (une permutation est la même, qu'on l'énumère par un bout ou par l'autre), tandis que le temps est irréversible. Il semble que l'ordre soit plutôt spatial, quand on le compare au temps et plutôt temporel, quand on le compare à l'espace. En réalité, l'ordre est ~~commun~~ immanent au temps et à l'espace, et il les dépasse; par cela seul qu'il leur est commun, il constitue une idée plus générale et plus haute. (Preuve: on peut discuter l'ordre hiérarchique de plusieurs idées, sans penser à aucune distinction spatiale ou temporelle.) Et pourtant, comme le nombre cette idée a un contenu ~~ou~~ un support intuitif, car des idées pures, ~~intelligibles~~ par exemple, n'ont pas d'ordre; elles ont des relations intelligibles, mais pas de rang. Il faut les situer en quelque sorte dans un réceptacle imaginaire pour les ordonner. Ici encore, nouvelle illusion: comparé aux formes sensibles, l'ordre paraît intelligible; comparé aux choses intelligibles il paraît plutôt sensible.

L'idée d'ordre paraît pouvoir se réduire à l'idée de correspondance qui joue un rôle essentiel en Analyse, car elle est la racine de l'idée de fonction. En effet, l'ordre peut se ~~identi~~ définir par la correspondance de n objets à n places déterminées. Autant il y a de correspondances données différentes, autant il y aura d'ordres.

Par exemple (Cournot) si l'on considère n sphères de rayons différents et n points de l'espace (suffisamment éloignés pour que 2 sphères ne puissent jamais se ~~pénétrer~~ toucher ~~ni~~ se couper), combien y aura-t-il de manières de distribuer ces sphères en ces points ? Autant que de permutations de n objets, soit n!. On voit ainsi que les diverses dispositions diffèrent par la configuration géométrique de l'ensemble, sans qu'il soit besoin d'établir aucun ordre entre les différentes places. Il suffit que les objets soient différents entre eux. Ainsi l'idée d'ordre est dépouillée de tout élément intuitif et sensible, spatial ou temporel : elle se réduit à la ~~pure~~ notion purement intelligible de correspondance.

Mais elle suppose (par définition même) un substratum intuitif où l'on puisse déterminer des places qu'on doit attribuer aux objets. Ce substratum n'est pas l'espace avons-nous dit ; et néanmoins il doit offrir une multiplicité, une extériorité. (partes extra partes) Le substratum commun du nombre et de l'ordre pourrait être la grandeur.

III L'idée de grandeur, en effet, est antérieure au temps comme à l'espace, puisqu'elle leur est commune, et elle les dépasse car elle s'applique à des objets qui ne sont ni étendus ni ~~durables~~ temporels (masses, températures, etc.) De plus, elle ne vient pas de l'intuition sensible car le continu ne peut ~~venir~~ en :

Les grandeurs incommensurables ne peuvent être objet d'expérience. L'ensemble des points rationnels d'une ligne par ex., suffit, et au delà, à donner l'illusion de la continuité sensible : il comporte plus de précision que n'en exigeront jamais les mesures empiriques. Aussi la création des nombres irrationnels x répond à un besoin de l'esprit, et non à une exigence de l'expérience. Le continu est donc une pure idée.

D'autre part, l'idée de grandeur revêt une forme sensible dans l'espace et le temps, tout en leur fournissant un fondement intelligible. C'est une multiplicité infinie et continue, comprenant un ensemble de grandeurs particulières et déterminées. C'est une idée à la fois universelle et concrète, et essentiellement synthétique, puisqu'elle est le fondement des axiomes mathématiques (jugements synthétiques a priori.) C'est donc une sorte de intuition rationnelle.

C'est elle qui fournit un contenu intuitif au nombre. Les nombres représentent les grandeurs discrètes composées de unités : ces unités sont situées et découpées au sein du substratum homogène et continu de la grandeur. De même, elle sert de support à l'idée d'ordre, en offrant des places différentes au sein d'une diversité tout idéale, d'une étendue intelligible. C'est en effet l'étendue de Descartes, Spinoza et Malebranche, étendue infinie et indivisible comme tout, mais réceptacle de toutes les idées de grandeurs particulières.

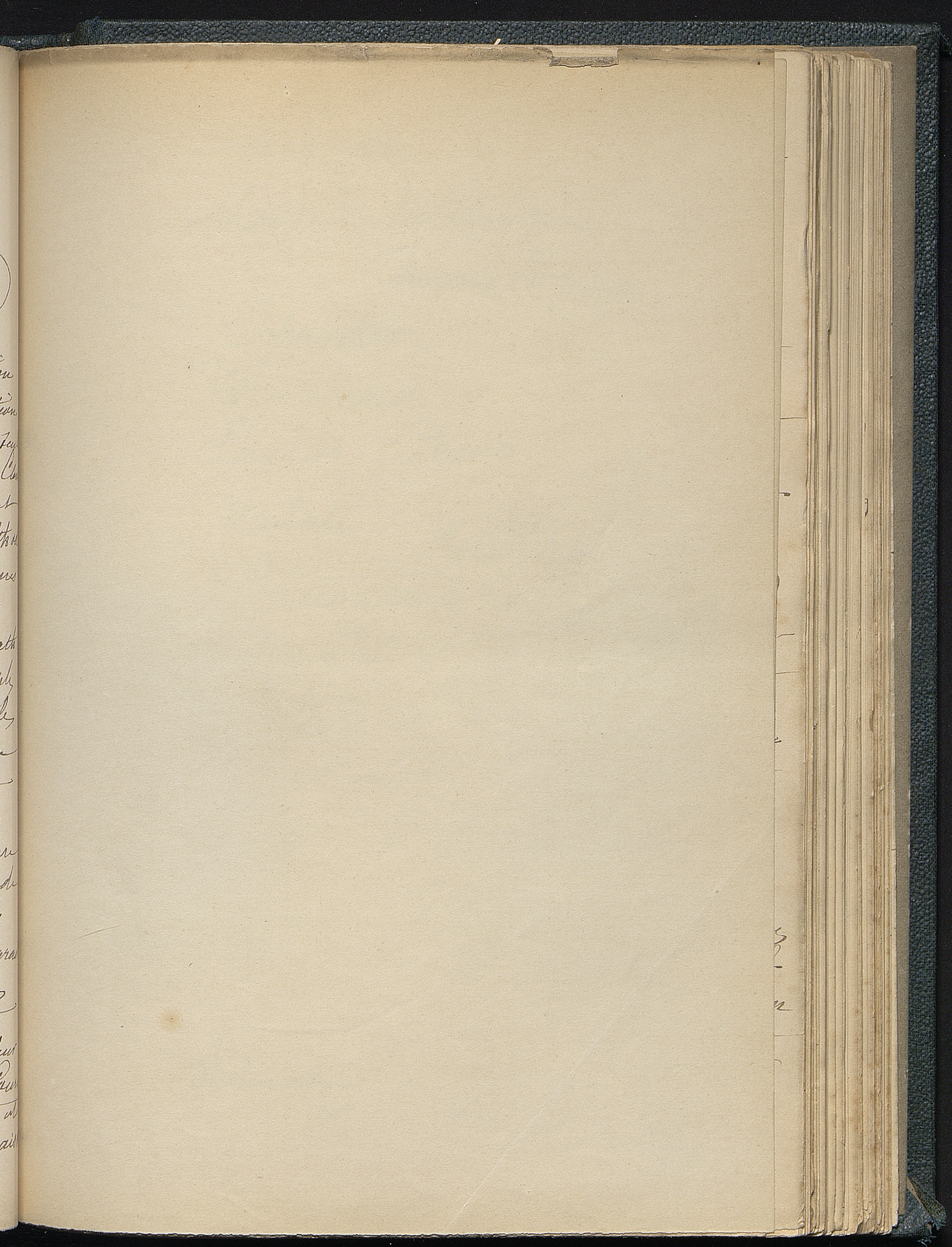
3

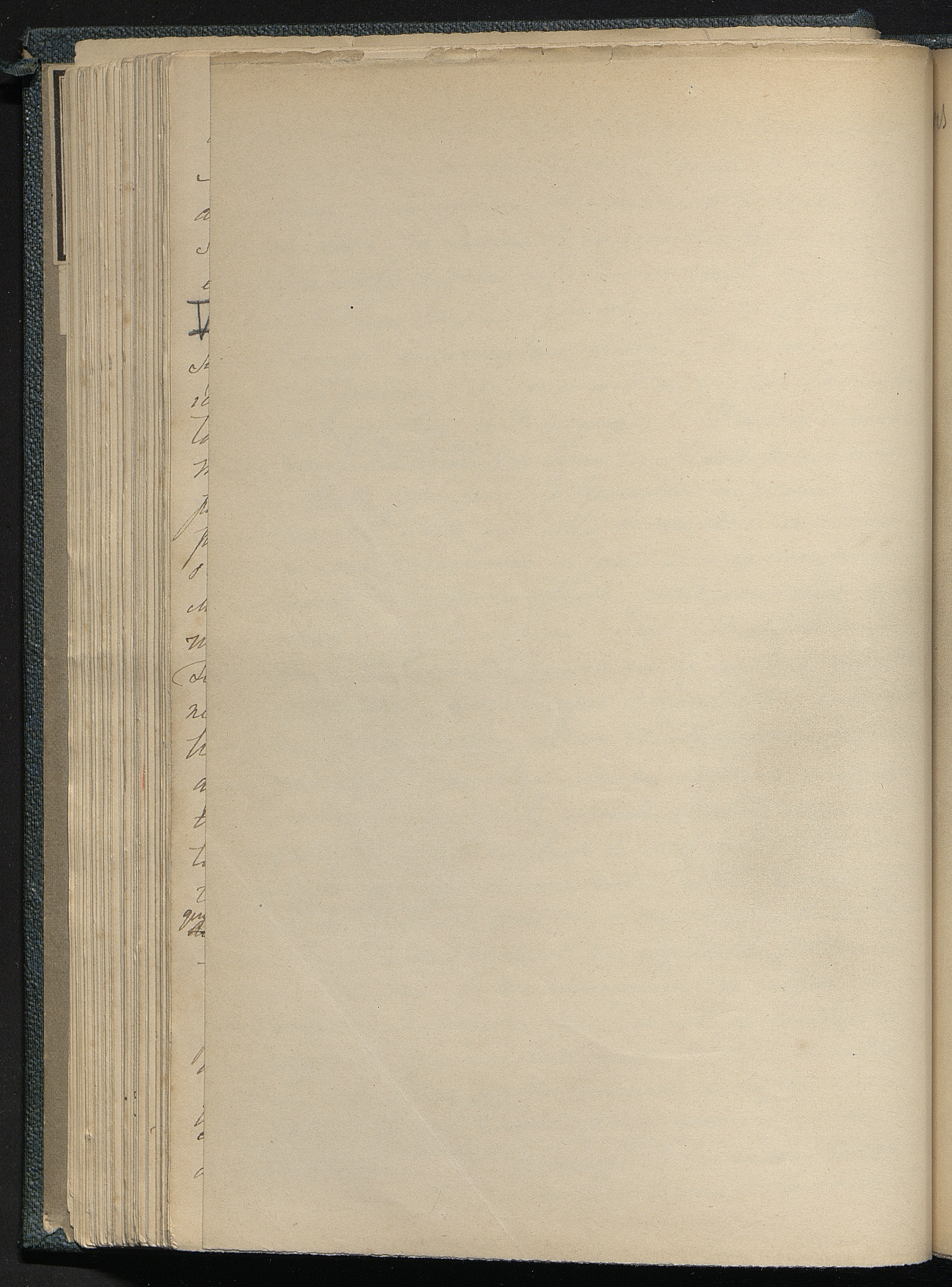
IV Les rapports hypothétiques entre les idées fondamentales expliquent les relations réelles de subordination et de mutuelle dépendance des sciences mathématiques qui peuvent servir, inversement, à les confirmer (c'est la méthode même des sciences expérimentales).
Nous avons vu, en effet, que la science du nombre n'est pas indépendante et ne se suffit pas à elle-même. L'Arithmétique pure (Théorie des nombres) tire un grand secours de l'idée d'ordre (Poinsot) c'est que l'idée d'ordre enveloppe l'idée de nombre avec un élément de plus qui donne plus de prise sur ~~tout~~ celle-ci.
Elle ne se développe que grâce à l'Analyse, c.à.d. à l'idée de grandeur: en effet, la principale difficulté de la Arithmétique supérieure vient de la discontinuité des propriétés des nombres: en les plongeant dans le continu on relie en quelque sorte ces propriétés, et ~~les ces~~ ~~contre~~ on fait rentrer dans une ~~règle~~ loi commune les cas en apparence exceptionnels. Il en est de même pour la science de l'ordre: elle se généralise grâce à la continuité (par ex. la Th. des probabilités) et l'ordre continu sert souvent à expliquer l'ordre discontinu, formé de unités isolées.
L'Algèbre, ne s'achève que grâce à la science de l'ordre et à celle de la grandeur: la résolution algébrique des équations fait appel à la Th. des substitutions et la résolution numérique à la Th. des fonctions, à l'idée

de continuité, attribut caractéristique de la grandeur. Aussi les sciences du nombre et de l'ordre ne sont ni autonomes ni complètes: elles viennent se fondre et s'élargir dans la science de la grandeur, qui les enveloppe et les dépasse infiniment, (seule vraiment générale sans exceptions).

V. Dans ce Cours, on s'est surtout occupé de la question critique, de la valeur des idées et des principes. Pourquoi a-t-on négligé la question logique et la question métaphysique? D'abord la question métaphysique (réalité de l'objet) ne se pose pas pour les Math. pures, mais bien pour les Math. appliquées, la Géométrie en premier lieu. C'est par l'espace et le temps que l'idée de grandeur se réalise et s'applique aux phénomènes. Quant à la question de méthode, elle disparaît, parce que les Math. pures sont elles-mêmes une méthode; c'est la Logique universelle des sciences, selon la pensée de Descartes, de sorte que la méthode des Math. ne se distingue guère des principes de la Math. Par exemple l'Algèbre, par sa matière, est une Arithmétique générale ayant pour objet le nombre; mais par sa forme, c'est une théorie générale du calcul, formelle et abstraite; c'est la Logistique, c.à.d. l'art de déduire de telles prémisses la conclusion qu'elles comportent; c'est une Logique pure qui semble dépasser le domaine de la quantité (1). Aussi s'est-on demandé si cette méthode universelle de calcul ne serait pas applicable à tous les concepts et à tous les raisonnements, si l'on ne pourrait pas constituer la Logique sur le modèle de l'Algèbre ou appliquer l'Algèbre à la Logique. L'étude de cette question nous ferait mieux comprendre la nature, la valeur et la portée de la méthode mathématique; ce sera l'objet du Cours de l'an prochain.

(1) Exemple: le binôme de Newton est une formule générale de [illegible]





~~Leibnitz.~~

Mach: Mécanique
Thermologie.

Schröder.

Whitehead.

Cantor. Peano.

Vailati. Halsted

Portuondo.

Appell

&c.

~~Halsted.~~

Ernst Mach: die Mechanik in ihrer Entwickelung
3e éd. Leipzig, Brockhaus, 1897 (1e, 1883; 2e, 1888)
Tendance antimétaphysique. Fera ressortir le contenu physique de la Mécanique.
Principe de toute (et empirique) science: Économie de la pensée.
Nouvelles relations de la Mécanique et de la Physique (Hertz)
— Introduction. La connaissance instinctive précède la connaissance scientifique. Elle est acquise par la satisfaction de nos besoins, par la pratique industrielle.
— Distinguer les expériences mécaniques et la science de la Mécanique. Leur disproportion chez les Anciens (Pourtant Vitruve connaît fort bien la nature du son)
La science naît de la division du travail, de la spécialisation des métiers. Pour transmettre les préceptes d'un métier, il faut simplifier et généraliser; on ne peut exprimer par concepts que ce qui est uniforme et régulier. (nominalisme) ~~C'est~~ Une loi n'est que le résumé de l'expérience. C'est la description la plus courte et la plus économique des faits. — Expliquer, c'est ramener à des éléments aussi simples et aussi connus que possible. Adaptation de la pensée aux choses. Ramener l'inconnu au connu c'est ramener le rare au fréquent, l'étonnant à l'habituel.
La science économise la pensée pour le praticien; moyen d'action, elle finit par être prise pour fin. Elle a pour but d'économiser des expériences en prévoyant leur résultat.
Utilité de la connaissance de l'histoire des sciences.

Ch. I. Evolution des principes de la Statique

1. Le principe du levier. La démonstration d'Archimède repose, non sur le principe de symétrie, mais sur un principe expérimental qui équivaut à la loi générale à savoir que ce qui détermine l'équilibre, c'est le moment statique (Pl.) De même celle d'Huyghens fondée sur la notion du centre de gravité.

Léonard de Vinci a conçu le parallélogramme des forces ou le principe du levier dans un cas particulier.

2. Le principe du plan incliné. Chaîne sans fin de Stevin. Il invoque l'impossibilité du mouvt. perpétuel. C'est là une connaissance instinctive, résumé d'expériences, ayant par suite une autorité supérieure à une expérience. Rien de mystique dans ces principes, non infaillibles, mais aussi objectifs que l'expérience qu'ils résument. Ils dispensent de faire l'expérience; on la fait par la pensée. Comme ils sont très généraux, ils condensent une foule des lois particulières; c'est là la philosophie de la science.

3. Le principe de la composition des forces. Peut se déduire du plan incliné (Stevin) qui en est un cas particulier. — Démontré par Varignon et Newton, comme un théorème de Géométrie (au moyen des mouvements; c'est une Statique fondée sur la Dynamique) Bernoulli y voyait une vérité purement géométrique; mais cela suppose que l'on connaît déjà la résultante ds certains cas particuliers. C'est en réalité une vérité d'expérience car cela suppose que l'une force a une grandeur & une direction,

et n'agit que dans sa propre direction. La démonstration mathématique (par le théorème des projections) suppose qu'un système de forces agissant sur un point peut être remplacé par une seule force appliquée au même point, ce qui équivaut au principe du parallélogramme ou au principe des projections.
Le principe de l'indépendance des forces est aussi une vérité empirique, implicitement postulée dans la démonstration du parallélogramme par Bernoulli.
4. Le principe des déplacements virtuels. (Stevin)
Découvert à propos des systèmes de poulies. Galilée a remarqué qu'un système de poids est en équilibre quand au total aucun ne peut descendre. Torricelli a formulé ce principe: quand le centre de gravité ne peut descendre. Le principe a ainsi une sorte d'évidence instinctive. Ce qui détermine l'~~équilibre~~ mouvement (ou détruit l'équilibre) c'est ΣPh, le travail. Pas évident a priori, quoi qu'en dise Pascal. L'expérience seule nous apprend que c'est le travail qui détermine l'équilibre; que ~~il est indifférent d'effectuer~~ la somme de plusieurs travaux jouit des propriétés commutative et associative.
Jusqu'à Newton, la force considérée est toujours le poids. C'est Newton qui généralise l'idée de force.
Formule du principe: Il y a équilibre lorsque la somme des moments virtuels est nulle (dans les machines réversibles) ou négative (dans le cas de ~~mouvements~~ déplacements irréversibles)

Essai de déduction de Lagrange : il réduit toutes les forces du système, par des fils, à un poids unique. Mais cela suppose déjà que c'est le travail qui donne la mesure de l'équilibre (dans les systèmes de poulies)

Loi de repos de Maupertuis : Les positions d'équilibre correspondent aux cas où la variation du travail est nulle (en partic. au minimum [éq. instable) ou au maximum [éq. stable]) – Loi de Courtivron (1749) : aux cas où la force vive du système est maxima ou minima.

Le principe de l'équilibre indique que les processus de la nature ~~ne~~ s'effectuent d'eux-mêmes dans un sens déterminé, et non dans le sens contraire (?)

Ce principe revient en somme à la constatation d'un fait : les corps tombent tant qu'ils peuvent tomber. Tout principe est explicatif, mais en même temps illusoire, en permettant de déduire toutes les lois d'une seule.

5. Retour sur l'évolution de la statique

La science naît de l'expérience industrielle, et du besoin de la ~~com~~ formuler ~~et~~ de la communiquer, de la résumer en des règles économiques.

Une telle règle ne se prouve qu'à la longue, par l'expérience. Les inventeurs la confrontent avec les règles antérieures et avec les principes instinctifs nés de l'expérience accumulée, et c'est ce qu'ils appellent démontrer une loi. Aussi ces démonstrations forment-elles une sorte de cercle vicieux. Si l'on préfère une loi à une autre équivalente, c'est pour des raisons économiques et esthétiques, si un principe permet d'embrasser en une formule une foule de faits différents

La recherche de démonstrations dans les sciences expérimentales engendre une fausse rigueur (Exemples: Archimède, Bernouilli)

Les connaissances instinctives nous paraissent certaines et objectives, et c'est pourquoi on les croit a priori. Mais ce sont des connaissances empiriques, dont l'autorité vient de l'expérience accumulée.

Tous les principes contiennent une règle pour reproduire mentalement les phénomènes (d'une façon schématique)

La force est conçue à l'imitation de l'innervation volontaire (cause de mouvement) comme une pression. On ne peut se débarrasser ni se passer de cette conception subjective et animiste.

Insuffisance de la mesure subjective des forces (efforts) On les considère comme homogènes, et on les compare aux poids, grandeurs mesurables (Cf. l'établissement de l'échelle thermométrique)

6. Principes de la Statique appliqués aux fluides. Heurêka de Archimède. Principe de la solidification, de Stevin, employé pour démontrer le principe de Archimède, en y joignant le impossibilité du mouvement perpétuel. Galilée applique le principe des déplacements virtuels à le Hydrostatique. Pascal l'applique plus correctement, en faisant abstraction du poids et en ne considérant que la pression superficielle

Propriétés des liquides: déplacement facile de leurs parties. Faible compressibilité; pression équilibrée par l'élasticité.

D'où égalité des pressions dans un liquide non pesant.
Pascal la prend comme un principe de fait.
On ~~appuie~~ suppose ensuite le liquide pesant; surfaces de niveau
Paradoxe hydrostatique. Centre de pression sur une paroi
Principe de Archimède
Déduction des principes de la Statique au moyen de l'Hydrostatique: ~~trian~~ 3 forces en équilibre forment un triangle — Formule de Green; théorie du potentiel.

7. Principes de la Statique appliqués aux corps gazeux

~~Otto de~~ Expérience de Viviani (1643) expliquée par Torricelli.
Pascal identifie la pression de l'air à la pression hydrostatique
Expériences d'Otto de Guericke (publiées en 1672) Poids de l'air.
Boyle découvre la loi de Mariotte, et la reconnaît inexacte

Ch. II: Evolution des principes de la Dynamique

1. ~~Découvertes~~ Travaux de Galilée. Opposition avec Aristote.
Léonard de Vinci avait étudié la chute sur le plan incliné; ~~devin~~ entrevu le principe de inertie
Benedetti (1585) reconnaît l'accélération et l'inertie
Galilée (1638) se demande, non pourquoi, mais comment les corps tombent (recherche des lois, et non plus des causes)
Il crut d'abord que la vitesse est proportionnelle à l'espace
Triangle de Galilée: La vitesse moyenne est moitié de la vitesse finale $v = gt$, $s = \frac{1}{2} gt^2$.
Galilée admet que le corps qui tombe sur un plan incliné acquiert la même vitesse que s'il tombait verticalement de la même hauteur (autrement, mouvement perpétuel) (un corps ne peut monter en vertu de son poids.)

Vérification au moyen du pendule de longueur variable. En conséquence, les temps de chute sont proportionnels ~~aux~~ à la longueur~~s~~ et à la hauteur du plan incliné, et les accélérations inversement proportionnelles. Les points qui tombent d'un même point sous diverses inclinaisons sont constamment sur la surface d'une sphère.

Galilée fait souvent usage du principe de continuité. Il découvre ainsi le principe d'inertie, en considérant le plan horizontal comme limite du plan incliné. Ce principe signifie que la cause déterminante du mouvement est proportionnelle à l'accélération (ce qui n'est nullement évident; ~~la cause du mouvement~~ les différences de tempéra~~de la chaleur et~~ture déterminent la vitesse de la chaleur, et non l'accélération.)

Inanité des démonstrations du principe de inertie.

Généralisation de la notion de vitesse $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ et de la notion d'accélération $\left(\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\right)$ Représentation graphique et analytique. Une formule n'est qu'une règle pour dresser un tableau.

L'action d'un corps, dans le temps, est proportionnelle à sa vitesse; dans l'espace, au carré de sa vitesse. D'où le malentendu entre Cartésiens et Leibnitziens.

Combinaison de la chute avec une vitesse initiale: par le parallélogramme des mouvements. Principe de l'indépendance des forces. Généralisation: double processus d'isolation et de superposition (ex: vibrations) Analyse et synthèse des phénomènes élémentaires.

(Cf Volkmann Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft, 1896.)

2. ~~Découvertes~~ Travaux de Huyghens.

Force centripète et centrifuge, leur loi : $q = \frac{v^2}{r}$.

Hostile à l'action à distance, Huyghens essaie d'expliquer l'attraction newtonienne par la force centripète de corps plongés dans un milieu plus dense qu'eux-mêmes.

Etude du pendule simple (Similitude phoronomique)

Pendule ~~circulaire~~ conique (avec force centrifuge) d'où l'on déduit la formule du pendule oscillant : $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

En général, le pendule conique décrit un cône elliptique.

Détermination de g par le pendule

Théorie du centre d'oscillation. Le centre de gravité du pendule composé doit remonter à la même hauteur (en vertu de l'impossibilité du mouvement perpétuel) que les molécules soient libres ou liées. De ce principe (instinctif) on tire l'équation : $k \frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = \frac{v^2}{2g} \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m}$

Σmr^2 = moment d'inertie.

k hauteur de chute ; v vitesse acquise au point le plus bas du pendule.

La longueur du pendule simple synchrone est : $l = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr}$

L'équation de Huyghens exprime l'équivalence du travail et de la force vive. Egalité de la hauteur de chute et de la hauteur où remonte le pendule :

$$\Sigma ph = \frac{1}{g} \Sigma \frac{pv^2}{2} = \frac{1}{2} \Sigma mv^2$$

Théorèmes ~~relatifs aux~~ touchant les moments d'inertie relatifs à divers axes d'oscillation. — Pendule réversible (de Kater). Lieu des axes réciproques d'oscillation.

Caractère économique du concept « moment d'inertie ».

Ellipsoïde d'inertie de Poinsot.

3. Travaux de Newton

Découverte de la gravitation universelle; systématisation des principes de la mécanique.

La loi des aires (Kepler) s'explique par une accélération centripète. La 3e loi détermine la loi d'attraction. Dès lors s'explique la 1re (ellipse) mathématiquement.

Newton identifie la gravitation universelle à l'accélération de la pesanteur: trait d'imagination hardie, fondé sur le principe de continuité. Ses précurseurs.

Un même corps pouvant recevoir des accélérations différentes, il s'ensuit la distinction de la masse et du poids, et la généralisation de l'idée de force.

Newton conçoit la force comme déterminatrice de l'accélération.

Il définit la masse (quantité de matière) par le produit du volume et de la densité. Cercle vicieux.

Le concept de masse provient de ce qu'il y a dans la matière un élément modificateur du mouvement, ~~qui existe~~ un degré de résistance au changement de vitesse (force d'inertie mal nommée.) La masse appartient à la catégorie de la substance (caractères permanents et constants des objets.)

Proportionnalité des masses aux poids (en un lieu.)

– Newton a clairement formulé le principe de ~~l'indé~~ la composition des forces (en vertu de leur indépendance)

– Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. (rendu nécessaire par la dynamique des systèmes, 3°. comme celui d'Huyghens, quoique plus intuitif en apparence) C'est ~~un principe instinctif~~, expérimental. La vérification implique la définition de la masse.

4. Explication et démonstration du principe de la réaction.

Newton définit la force par le produit masse × accélération. Dès lors, l'accélération est en raison inverse de la masse. Il ne s'agit que de l'accélération relative, commune aux deux corps en présence. (Galilée avait déjà réfuté les péripatéticiens qui croyaient que les corps plus grands tombent plus vite)

– Expériences (où une accélération imprimée à une masse de Poggendorff) modifie son poids. Phénomène des marées, expliqué par la différence d'accélération entre la terre et l'eau. (Longue citation de Quinte-Curce)

5. Critique du principe de la réaction et du concept de masse.

(métaphysique)

La notion de quantité de matière n'est pas claire et ne fournit aucun moyen de mesurer la masse. Au fond le principe de réaction et le concept de masse sont relatifs l'un à l'autre: deux corps ont des masses égales quand ils se communiquent des accélérations égales. En gén. leurs masses seront en raison inverse des accélérations qu'ils se communiquent par leur action réciproque (Définir une grandeur, c'est donner le moyen de la mesurer, d'en apprécier l'égalité & l'inégalité, etc)

Difficulté (générale): Les masses étant mesurées par rapport à un étalon, leurs rapports subsistent-ils quand on les rapporte à un autre étalon? Ce n'est pas là une nécessité logique mais un fait d'expérience physique (on peut le déduire de l'impossibilité du mouvement perpétuel) Le principe de réaction est donc déjà impliqué dans la

définition de la masse, et ne fait que la répéter.
De cette définition résulte la proportionnalité des masses aux poids (même accélération), ce qui permet de les mesurer pratiquement. (d'expérience
Tout cela ne fait qu'exprimer ce fait, que chaque corps possède un caractère qui détermine son accélération.

6. Vues de Newton sur le temps, l'espace et le mouvement.

Newton distingue le temps relatif et le temps absolu. Il est en cela infidèle à ~~son~~ principe: ne considérer que les faits. Dire qu'un objet change avec le temps, c'est dire que ses états dépendent des états d'un autre objet (de la rotation de la terre.) Un mouvement n'est uniforme que par rapport à un autre, et non en soi. Quand on fait abstraction de toutes les circonstances extérieures (en apparence indifférentes), on a l'idée du temps absolu, concept métaphysique et vide. (Mach admet que ~~certains~~ les états correspondants ont lieu en même temps.) Le temps n'est rien en dehors des choses qui passent. L'irréversibilité du temps vient de ce que une partie seulement des changements dans la nature dépend de nous, et peut être renversée. La différence du passé et du présent provient de la distinction des domaines du souvenir et de la perception. Dire que le temps a un sens, c'est dire que les processus physiques se font dans un sens unique et déterminé. (Les différences de température, de potentiel, etc ne peuvent que diminuer.) — On passe du temps physiologique & physique au temps mathématique comme des sensations de chaleur à la notion de température. On choisit arbitrairement un mouvement à peu près parallèle à ~~la~~ notre sensation du temps.

Il n'y a là que des phénomènes en dépendance mutuelle ;
dès lors toute obscurité métaphysique disparaît (tendance
de l'homme à hypostasier ses abstractions.) v. Wärme
Newton ~~distingue~~ fixe aussi un espace absolu, un mouvement
absolu, comme nécessaires à la Mécanique, bien qu'inobservables.
La force centrifuge permet de distinguer le mouvement absolu.
— Tout mouvement est relatif ; les lois mécaniques sont (anthropiquement) relatives
au monde physique, au ciel des étoiles fixes. La force centrifuge
ne révèle que des mouvements relatifs à ces repères empiriques.
Le principe d'inertie ne postule pas non plus un espace absolu :
il ne concerne que les accélérations relatives. On ne peut considérer
le mouvement d'un corps en faisant abstraction du reste du monde.
— Discussion des objections de Streintz ; de la définition
de l'inertie par Lange (relative à un système d'axes qui
implique le principe) — Le principe d'inertie est relatif
au ciel des étoiles fixes et à la rotation de la terre.
On peut réaliser l'espace en le concevant comme un milieu
physique.
7. Critique d'ensemble des théories de Newton.
La définition de la masse ne signifie rien. La définition
de l'inertie fait double emploi avec celle de la force,
comme cause d'accélération. Le principe de inertie et celui
de la proportionnalité de l'accélération à la force sont
impliqués dans la définition de la force. Le principe de
réaction est relatif de la définition de la masse. Le principe
de l'indépendance des forces (des accélérations) n'est pas
évident, mais un fait d'expérience
Mach formule les principes de la Mécanique newtonienne
sous la forme la plus simple (p. 242) la plus économique

8. Retour sur l'évolution de la Dynamique

Le concept mathématique de force n'a plus rien d'obscur ni de métaphysique : masse et accélération sont les deux éléments déterminants du mouvement.

Galilée a préféré déterminer la vitesse en fonction du temps qu'en fonction de l'espace. Les deux étaient possibles, et donnaient la loi du mouvement. Suivant qu'on prend pour élément déterminant de la vitesse le temps ou l'espace, on obtient le système de Galilée-Newton, fondé sur les notions de force et de quantité de mouvement, ou le système d'Huyghens, fondé sur les notions de travail et de force vive (la force est alors la dérivée du travail par rapport à l'espace parcouru.) [Mach déprécie Descartes.] Les deux systèmes sont équivalents : $pt = mv$, $ps = \frac{mv^2}{2}$. Ils pourraient se développer séparément ; historiquement, ils se sont mêlés. Newton le premier a nettement distingué la masse du poids. La méthode de Newton détermine le mouvement de chaque masse ; celle de Huyghens est préférable pour déterminer le mouvement du système.

Part du hasard et de la convention dans l'évolution de la science. C'est la nécessité de rechercher les lois élémentaires (différentielles) plus simples, qui oblige à considérer la vitesse et la force (ou accélération) pour déterminer les relations entre les positions des corps (lois intégrales).

— Critique de la Mécanique de Hertz (1894). Le principe de moindre action n'est pas finaliste. Le principe adopté par Hertz est une synthèse du principe d'inertie et du principe de moindre contrainte (de Gauss.) Remplace les forces apparentes par des liaisons cachées avec des masses cachées. ~~Les~~ L'action

au contact n'est pas plus intelligible que l'action à distance. Tandis que Newton remplace toutes les liaisons par des forces, Hertz remplace toutes les forces par des liaisons (fictives). Mais sa fiction est moins commode. Les principes expérimentaux sont au fond toujours les mêmes.

Chap. III. Application ultérieure des principes et développement déductif de la Mécanique.

1. Portée des principes de Newton.

Ils suffisent à résoudre tous les problèmes mécaniques; il n'y a plus que des difficultés mathématiques à résoudre. Ils s'appliquent aux cas d'équilibre et de repos. Mach fait intervenir dans ces cas les forces élastiques; il n'y a jamais de véritable repos. Le corps solide est une fiction schématique. [Mach méconnaît le sens et le rôle de l'abstraction.] Ex: théorie du levier, en tenant compte de l'élasticité. [Mach fait intervenir des accélérations aussi fictives que les forces statiques] Le théorème de Varignon peut se déduire des principes de Newton; la Statique rentre ainsi dans la Dynamique.

2. Les (formules) expressions de calcul et mesures de la Mécanique

Elles contiennent toutes la masse m et la force p avec deux des quantités: s, v, t. Elles montrent si un problème est déterminé ou non. Noms attribués aux expressions mv, mv^2, ps, pt. Manière dont Descartes définit la quantité de mouvement et en déduit la constance de l'immutabilité divine (trop de métaphysique et d'a priori). Définition de la « force » par Leibniz. Il confond la question de la mesure de la force et celle de l'invariabilité de la somme Σmv ou Σmv^2. Principe de l'homogénéité. Dimensions. Systèmes d'unités

3. Lois de la conservation de la quantité de mouvement, de la conservation du centre de gravité et de la conservation des aires.

Ce sont des règles spéciales à certains cas généraux déduites des principes de Newton.

La quantité de mouvement d'un système est déterminée uniquement par les forces extérieures.

Le mouvement du centre de gravité d'un système est déterminé uniquement par les forces extérieures. Ex: recul des armes à feu. Lacet des locomotives.

La ~~~~ somme des aires décrites par les rayons vecteurs (et multipliées par les masses) est indépendante des forces intérieures du système. Par suite, elle croît uniformément quand il n'y a pas de forces extérieures, ou quand elles passent toutes par le centre fixe. Ex: moteur électrique mobile autour d'un axe. Roues à réaction.

Le principe des aires exprime le principe d'inertie dans le système des coordonnées polaires, comme le principe du centre de gravité dans le système de coord. cartésiennes.

– Rôle du sentiment dans la Mécanique, justifié par cette remarque que nous sommes des machines vivantes et sensibles.

4. Lois du choc

Marcus Marci, de Prague: De proportione motus (1639)

Expérience infructueuse de Galilée. Tentative inutile pour mesurer un choc par un poids. Le moindre choc peut vaincre la force (pression) la plus grande.

Wallis étudie le choc inélastique, pose en principe la constance de Σmv (moments) Wren et Huyghens ont

étudié le choc élastique. Huyghens admet le cas de 2 masses égales avec vitesses égales; et que un corps si petit qu'il soit ébranle un corps au repos, si grand qu'il soit. Il en déduit les règles générales au moyen du principe des mouvement relatif (fiction du bateau) et du principe de symétrie (si l'un des corps rebondit avec la même vitesse, l'autre aussi). Il aboutit à la conservation de Σmv^2.
Données empiriques nouvelles. Il y a des corps élastiques et inélastiques. Considération des forces développées par le changement de forme des corps; d'où conservation de la vitesse relative des 2 corps élastiques. L'expérience seule nous apprend que mv est le déterminant du choc.
On peut déduire les lois de Huyghens des principes de Newton. Tout dépend uniquement de la différence de vitesse des 2 corps. La quantité de mouvement qui se conserve n'est pas la quantité absolue, comme le croyait Descartes.
La perte de force vive dans le choc inélastique (Carnot) — Choc excentrique; théorie du centre de percussion (Wallis). Pendule balistique de Robins. Pas de forces instantanées (Poncelet)

5. Principe de D'Alembert.

Provient de la théorie du centre d'oscillation (Jacques et Jean Bernouilli.) L'accélération angulaire du pendule composé est égale au quotient de son moment statique par son moment d'inertie.
Étant donné un système de forces P appliquées à des points soumis à des liaisons, on les décompose en forces actives W suivant le sens du mouvement, et en forces de liaison — V. Le système V est en équilibre; donc les syst. P et W aussi. Tout le travail produit par les forces P est produit par les forces W.

6. Principe des forces vives. (Huyghens)

Se généralise en s'étendant aux forces variables :

$$\Sigma' \int p\,ds = \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2)$$

Dans le cas des forces centrales (où il y a une fonction des forces [Hamilton]), $\int p\,ds$ ne dépend que de la position initiale et finale, et devient : $\int dV = V_1 - V_0$.

7. Principe de la moindre contrainte (Gauss)

Soit ab le chemin que parcourrait chq p. s'il était libre, ac celui qu'il parcourt en vertu des liaisons ; bc est dit l'écart. Le principe de Gauss énonce que le mouvement réel est celui pour lequel $\Sigma m(bc)^2$ est minimum.

Il se déduit du principe de D'Alembert.

Diverses formes : $\Sigma m s^2$, $\Sigma p s$, $\Sigma m \gamma^2$.

Ce principe comprend l'équilibre comme cas particulier.

Toute liaison ajoutée augmente la somme des écarts.

Exemple : corps glissant sur un plan incliné mobile.

Le principe de Gauss n'apprend rien de nouveau : c'est une forme nouvelle des principes connus. Il n'a aucun sens métaphysique ou mystique (1) Il s'agit de définir mathématiqt la contrainte.

8. Principe de la moindre action (Maupertuis)

Maupertuis mesure l'action par mvs, on ne sait pourquoi. Il commet des incohérences (pour la ~~lumière~~ réfraction par ex.)

Euler cherche une loi de finalité qui ~~se traduise~~ par un maximum ou un minimum. Il définit l'action : $\int v\,ds$. Cela suppose que la vitesse est fonction de la position, c à d qu'il y a une fonction des forces (cas où l'applique le principe des forces vives). La condition exacte est que la

(1) Il fournit les équations de D'Alembert par différentiation. On peut toujours trouver, en intégrant les éq. diff. la fonction qui a une variation nulle pour le mouvement considéré.

variation de $\int \omega ds$ soit nulle, sauf qu'il y ait max ou min.
Analogies entre le mouvement déterminé par la moindre action, la position d'équilibre d'un fil tendu, et la trajectoire d'un rayon lumineux (déterminées aussi par un minimum)
Au fond, ces principes de minimum disent qu'il arrive tout ce qui peut arriver, c.à.d. que le mouvement est déterminé d'une manière univoque. Or (selon remarque de Petzoldt), le cas ~~unique~~ et exceptionnel déterminé parmi une infinité d'autres correspond à la variation nulle d'une certaine fonction: c'est pourquoi c'est le cas du mouvement réel.
[Principe du déterminisme, ou de raison suffisante ?.]

9. Principe de Hamilton

V étant le travail et T la force vive, la variation de

$$\int (V+T)\, dt = 0$$

doit être nulle, pour une trajectoire infiniment voisine ayant mêmes extrémités (c.à.d. que δV et δT sont nulles au commencement et à la fin) Ce principe se déduit du principe de D'Alembert (v. Kirchhoff, Jacobi.) Il lui est donc mathématiquement équivalent.

E. Mach : die Principien der Wärmelehre

Leipzig, Barth, 1896.

Préface : Pas d'érudition ni de biographie ; c'est une histoire des idées.

Introduction. Les théories régnantes sont souvent un obstacle au progrès des sciences ; les grandes découvertes sont dues à des esprits affranchis des préjugés de leur temps. L'histoire des sciences enseigne l'indépendance et l'esprit critique. — Le développement de la théorie de la chaleur a été plus lent et plus laborieux que celui de la Mécanique (1)

Histoire du développement de la thermométrie.

Les sensations de chaud et de froid nous révèlent l'état calorique des corps, mais ne permettent pas de le mesurer, à cause de leurs variations et contradictions. Il fallait trouver un signe objectif de cet état : Galilée a choisi le volume et inventé le thermomètre à air. Sturm et Hubin ont inventé le thermomètre différentiel (à air). Amontons (1699) invente un thermomètre-manomètre à air : il mesure la température par la pression : il a l'idée du zéro absolu, que Clément et Desormes ont retrouvé plus d'un siècle après (1819). Lambert mesure aussi la température par la pression, et corrige les indications du thermomètre à air par celles du baromètre. Il choisit pour points de repère la glace fondante et l'eau bouillante (1417 et 1000, en pression).

Le thermomètre à liquide, fermé, est dû peut-être à Rey (1631). Renaldini emploie les repères : glace fondante et eau bouillante.

(1) Voir : die Mechanik in ihrer Entwickelung, par E. Mach. Leipzig, Brockhaus. 1883. (2e éd 1889 ; in 8°, 492 p.)

Fahrenheit construit des thermomètres à mercure (1714). Réaumur invente son échelle (1730). Celsius invente l'échelle centigrade (1742) que Strömer retourne comme à présent. Dilatation des corps solides, étudiée par l'Académie del Cimento, Muschenbroek, s'Gravesand et Lowitz.

Loi de Boyle (1662) ou de Mariotte (1679) contrôlée par Regnault et par Amagat (1880). PV passe par un minimum. Loi de Charles (1787) ou de Gay Lussac (1802) découverte aussi par Dalton (1801). Coeff. de dil. de l'air de 0 à 100 : 0,375. Le coeff d'augm. de pression est un peu différent. Gay-Lussac a vérifié la proportionnalité de la dilatation de l'air et de celle du mercure entre 0° et 100°. Zéro absolu : $-273°$ ($\alpha = \frac{1}{273}$) Température absolue : $T = 273 + t$. $\frac{PV}{T} = \text{Constante}$.

Dalton constate que, à la même température, la tension d'une vapeur dans le vide est la même que dans l'air. En général, dans un mélange de gaz et de vapeurs, chaque gaz se comporte comme s'il était seul (1801). Il complique cette loi d'une hypothèse gratuite, en disant que les particules d'un fluide ne pressent pas celles des autres. ~~mais~~

Les vapeurs non saturées (ou surchauffées) suivent la loi de Mariotte-Gay Lussac (Expériences avec un tube barométrique.) Mesure de la tension maxima des vapeurs : méthode statique (par le vide barométrique) méthode dynamique (par l'ébullition). Recherches de Regnault sur la pression de la vapeur d'eau. Cagniart de la Tour a obtenu des vapeurs dont la densité était voisine de celle des liquides, à de très hautes températures et pressions.

Faraday liquéfie les gaz en les produisant en vase clos, sous de fortes pressions. Andrews découvre la température critique (où la tension maxima devient infinie) qui sépare l'état-gaz de l'état-vapeur. Mendelejeff l'appelle : point d'ébullition absolu, parce que le liquide bout à cette température sous toute pression, si grande qu'elle soit. A cette température, la tension superficielle du liquide s'annule.

Représentation graphique des P, V, T des gaz et vapeurs.

- Deluc a reconnu le maximum de densité de l'eau (1772). Despretz, puis Exner l'ont déterminé (+3°,945 C.)

- Mesure de la dilatation des solides : Lavoisier-Laplace, Roy, Ramsden.

Dulong et Petit (1817) ont comparé le thermomètre à mercure au thermomètre à air ; déterminé la dilatation absolue du mercure, du verre et de quelques métaux. Les liquides et solides ne se dilatent pas proportionnellement. Si l'on adopte le thermomètre à air, les coefficients de dilatation de tous les autres corps croissent avec la température. Les capacités calorifiques croissent aussi, et inégalement. Pour Dulong et Petit, l'échelle rationnelle serait celle dont les degrés seraient proportionnels aux quantités de chaleur acquises par le corps thermométrique. Mais pour cela il faudrait que sa capacité calorifique fût constante.

Dalton (1808) guidé par des lois fausses et des conceptions arbitraires, propose une échelle où les degrés correspondent à un accroissement du volume de l'air dans le même rapport.

En somme Dulong et Petit ont prouvé que l'échelle dépend du corps thermométriques seuls, les thermomètres à gaz sont comparables entre eux, d'où le choix du th. à air comme thermomètre normal.

Critique du concept de température.

Le choix du volume, comme qualité ~~d'un corps~~ thermoscopique d'un corps, est *arbitraire* et *conventionnel*: car il y a beaucoup d'autres propriétés des corps qui varient avec la température. ⊕
~~C'est l'expérience qui nous apprend que le volume varie dans le même sens que~~
Deux corps longtemps en contact offrent à nos sens le même état calorique (exception: le fer paraît toujours plus chaud ou plus froid que le bois: cela tient à la conductibilité) L'*expérience* nous apprend qu'ils arrivent à un équilibre de volume. D'où 2e *hypothèse arbitraire*: on considère comme égaux les états caloriques de 2 corps qui mis en contact ne changent plus de volume.

Si 2 corps A et B sont aussi chauds pour nos sens qu'un 3e C, ils sont aussi chauds l'un que l'autre (*nécessité logique*) Mais ~~que~~ c'est l'*expérience* qui nous apprend que, si les 2 corps A et B ne changent pas de volume en présence de C, ils ne changent pas non plus de volume en présence l'un de l'autre (Cf. *Maxwell*, *Theory of heat*, 1871) Donc on p
Si 2 corps A et B ont ~~la même température~~ état calorique qu'un 3e corps C, ils ont le même ~~température~~ état calorique l'un que l'autre.

Définition arbitraire: Les températures plus élevées sont celles qui correspondent à un plus grand volume du thermoscope. Il ne s'ensuit pas qu'elles correspondent à un plus grand volume

---

⊕ C'est l'expérience qui nous apprend que le volume varie en général dans le même sens que l'état calorique *senti* (exceptions: l'eau

du corps considéré : exemple l'eau au-dessous de 4°)
Les sensations de chaleur et les volumes thermoscopiques forment une multiplicité continue simple ; mais il ne s'ensuit pas que les températures en forment aussi une.
L'expérience nous apprend qu'un corps ne peut passer d'une température à une autre sans passer par toutes les températures intermédiaires.
Un autre choix arbitraire est celui du corps thermoscopique. Il suffirait de noter et de nommer ses divers états pour les diverses températures ; les signes les plus commodes sont les nombres, qui indiquent en même temps l'ordre.
L'application des nombres aux états thermoscopiques demande une nouvelle convention.
L'échelle centigrade appliquée au thermomètre à liquide varie suivant la nature du liquide et celle du vase.
Tous les gaz suivent la même loi de dilatation, d'où l'on a conclu (à tort) que le thermomètre à gaz était plus naturel ou moins conventionnel. Avantages : sensibilité ; l'influence de l'enveloppe est négligeable ; comparabilité.
La température est le nombre qui correspond à un état calorique (suivant une corrélation univoque : $t = f(v)$.
Principe de Galilée : les volumes croissent en progression arithmétique comme les températures.
Principe de Dalton : les volumes croissent en progression géométrique, les temp. croissant en progression arithmétique.
Principe de Amontons : la température proportionnelle à la pression d'un gaz à volume constant (température absolue)

On a longtemps méconnu le caractère arbitraire de la température et beaucoup d'auteurs ont parlé de la température comme d'une grandeur naturelle et réelle, qu'il s'agissait de mesurer : Lambert, Dalton, Gay-Lussac, Dulong et Petit même parlent de dilatation uniforme ou non. Clausius même considère la pression d'un gaz comme mesurant approximativement la température (Théorie mécanique de la chaleur, 1864.)

Tendance générale de l'esprit à hypostasier des concepts ; c'est ainsi que Newton concevait un temps et un espace absolus. Il réalisait nos sensations de temps, et les comparait aux diverses mesures du temps. De même pour l'espace.

Le zéro absolu donne lieu à la même illusion : on croit qu'à -273° la pression d'un gaz s'annule, de sorte que l'échelle des températures serait limitée inférieurement. Si l'on avait adopté le principe de Dalton, elle serait infinie dans les 2 sens, sans que cela change rien à la possibilité d'une pression nulle. Il ne faut pas prendre les propriétés d'un système de signes pour les propriétés de la chose signifiée. On peut concevoir une foule de zéros absolus : tous dépendent d'hypothèses invérifiables, et ne préjugent en rien les faits. De ce que, la pression devenant nulle, l'échelle thermométrique fait défaut, il ne résulte pas que les états caloriques ~~n'existent~~ inférieurs n'existent pas [Exemple emprunté aux hauteurs de sons (Comparaison avec l'argument ontologique)] mais seulement que le gaz ne peut plus servir de thermomètre. L'expérience seule peut nous apprendre si la série des états caloriques est limitée supérieurement ou inférieurement.

En résumé, la température est la désignation d'un état calorique par un nombre, un numéro d'ordre. Le concept de température est un concept de niveau (absolu)

Sur la détermination des hautes températures.

Newton, en s'appuyant sur la loi du refroidissement des corps, mesure leur température initiale à la durée du refroidissement. Il commet ainsi : 1° une extrapolation ; 2° une pétition de principe : les pertes de chaleur sont proportionnelles à la chaleur (càd. à la température) ; 3° une confusion de la température avec la quantité de chaleur ; 4° enfin il suppose arbitrairement que la température est proportionnelle à la dilatation de son thermomètre à huile de lin. Il y a là deux échelles de température distinctes, qui coïncident approximativ[t] et par hasard.

Principe pyrométrique de Biot (1804) : sur une barre chauffée à un bout, la température décroît en progression géométrique quand la distance croît en progression arithmétique. Cette loi est déjà inexacte dans les limites accessibles au thermomètre. Au delà, elle constitue une extrapolation arbitraire, qui définit une nouvelle échelle de température.

Méthode pyrométrique de Black : il mesure au calorimètre la température d'un corps très chaud (la température initiale et finale du calorimètre étant accessible au thermomètre.) Mais cela suppose que la chaleur spécifique du corps ne varie pas avec la température, ce qui est déjà faux dans les limites du thermomètre usuel (1804.)

En général, toutes les qualités d'un corps qui varient avec

son état calorique peuvent fournir une méthode pyrométrique; ~~mais et sous~~ mais ~~et sont de noms~~ chaque méthode définit une nouvelle échelle de températures, incomparable aux autres. Les nombres obtenus sont de simples numéros d'ordre marquant l'inégalité. Leur traduire en degrés centigrades est un non-sens.

Noms et nombres.

Le nom est un signe associé à un objet ou à un phénomène, et qui en est le représentant. Sa supériorité sur tous les autres signes (naturels.) Son utilité dans la vie (nom propre). Les nombres sont des noms, des signes d'ordre. Théorie nominaliste de Helmholtz-Kronecker. La suite des nombres est un système de signes d'une application universelle. Les propositions de mathématique sont des vérités d'expérience (interne). On ne compte ~~que~~ les choses qu'en tant qu'égales (sous un certain rapport) on les considère comme des unités. Les degrés de température ne peuvent pas se remplacer (comme les unités de potentiel.) Ils ne sont égaux que géométriq[uemen]t ou dynamiq[uemen]t, en tant qu'accroissements égaux de volume ou de pression; mais une température n'est pas la somme de ses degrés.

Le continu.

Dans tout intervalle fini il y a un nombre infini de différences infiniment petites — Le continu sensible, d'autre part, consiste en un ensemble de quantités ou qualités qui diffèrent d'une manière sensible, mais telles qu'on peut passer de l'une à l'autre d'une manière insensible (le continu apparent peut être réellement discontinu : stroboscope) En appliquant la mesure au continu (sensible) on remplace l'appréciation sensible des différences

par une définition math. de celles-ci. L'unité et tous les nombres sont divisibles à l'infini; les irrationnels complètent le continu numérique. Mais de ce qu'on applique le continu numérique à un continu sensible, il ne s'ensuit pas que celui-ci contienne des éléments correspondant à tous les nombres (ce serait conclure du signe à la chose signifiée). L'auteur ne trouve aucune difficulté dans l'infini ni dans l'infiniment petit. Le Calcul différentiel ne s'occupe que de quantités finies, mais très petites.

Histoire de la théorie de la conduction de la chaleur

Hypothèses d'Amontons, Lambert, Franklin, Mayer.
Biot applique la loi de Newton au calcul de la conduction: dans l'état stationnaire d'une barre, chaque point reçoit autant de chaleur par conductibilité qu'il en perd au contact de l'air: or cette perte est prop. à l'excès de tempér. Il trouve ainsi que si la distance croît en progression arithmétique, la temp. décroît en progr. géométrique (1)
Fourier: Théorie analytique de la chaleur (1822)
Hypothèse (vérifiée par ses conséquences): 2 éléments voisins échangent une quantité de chaleur prop. à leur diff. de temp.
On considère une plaque indéfinie, à faces parallèles, de temp. u_1 et u_2. Si l'état initial est une chute uniforme, il se conserve; sinon, il tend vers une chute uniforme de temp. La quantité de chaleur qui traverse la surf. s par seconde est:

$$q = ks\frac{u_1 - u_2}{l} \quad \text{(flux de chaleur)}$$

(1) Laplace a remarqué que cela suppose une distance finie entre les éléments du corps conducteur.

Dans une distribution de temp. continue mais sans chute uniforme, l'élément de volume $s\,dx$ reçoit le flux différentiel

$$ks \frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,dt$$

Son accroissement de température est $\frac{du}{dt}\,dt$. Soit c sa capacité calorique, ρ sa densité : on a l'équation :

$$c\rho s\,dx \frac{du}{dt}\,dt = ks \frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,dt$$

ou

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

Équation analogue dans le cas d'un corps quelconque

k est le <u>coefficient de conductibilité interne</u>

Dans le cas d'un corps fini, il y a déperdition par la surface prop. à l'excès de temp. sur le milieu ambiant

$$q' = hsu$$

<u>h coefficient de conductibilité externe</u> (relatif au milieu)

Fourier ramène ce cas à celui d'un corps illimité par la fiction suivante : il mène à l'intérieur du corps illimité la surface du corps considéré, et imagine qu'en ch. point la chute <u>normale</u> de temp. est telle que le flux de chaleur qui y passe est égal au flux de chaleur dû à la déperdition

$$-ks \frac{du}{dn} = hsu \qquad \frac{du}{dn} + \frac{h}{k}u = 0$$

<u>Le principe de l'homogénéité</u> est dû à Fourier

<u>Fourier</u> et <u>Péclet</u> ont cherché à déterminer <u>k</u> par expérience

Cas d'une verge mince, avec déperdition latérale :

$$c\rho s \frac{du}{dt}\,dt = ks \frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,dt - hp\,dx.\,u\,dt$$

p (périmètre de la section transversale) ou

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{c\rho}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{hp}{ks}u$$

Pour avoir l'état stationnaire, il faut faire : $\frac{du}{dt} = 0$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{hp}{ks} u = 0$$

Intégrale : $u = Ae^{nx} + Be^{-nx}$ $\left(n = \sqrt{\frac{hp}{ks}}\right)$

Conditions aux limites : $\underset{x=\infty}{u = 0}$ $\underset{x=0}{u = V}$

$u = Ne^{-nx}$ C'est la loi de Biot.

Forbes a déterminé k en valeur absolue : le flux de chaleur qui passe par une section de la tige en 1 seconde :

$$ks \frac{du}{dx}$$

est égal à la chaleur perdue par la partie ultérieure de la tige, qu'on mesure expérimentalement.

Fourier a fondé la méthode de la physique mathématique.

Problème des cordes vibrantes : Brook Taylor (1717), partant d'une déformation sinusoïdale de la corde, démontre qu'elle oscille suivant la loi du pendule.

$y = a \sin \frac{\pi x}{l}$. La force qui agit sur l'élément dx est $p \frac{d^2y}{dx^2} dx = -py \frac{\pi^2}{l^2} dx$, donc prop. à l'élongation y (p est la tension) Soit m la masse totale de la corde, la période est : $T = 2\sqrt{\frac{ml}{p}}$.

Taylor croyait que la loi sinusoïdale de vibration était la seule, et finissait par s'établir quelle que fût la position initiale.

D'Alembert montra au contraire que les lois de vibration sont aussi nombreuses que les positions initiales.

La force ~~pouvo~~ élémentaire étant représentée à la fois par

$p \frac{d^2y}{dx^2} dx$ et par $\frac{m}{l} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} dx$

on a en gén. l'éq: $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{pl}{m} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ $\left(\frac{pl}{m} = c^2\right)$

dont l'intégrale gén. est: $u = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$

<u>Daniel Bernoulli</u> concilie Taylor et D'Alembert en concevant la déformation initiale comme définie par une série de sinus (c.à.d. comme une somme de vibrations harmoniques[1] qui se perpétueraient en vertu de la loi de Taylor.) Euler, doutant que ce fût possible, considérait la loi de D'Alembert comme plus générale.

– <u>Equations aux dérivées partielles</u>. Eq. d'une surf. cylindrique

$$u = \varphi(y + ax)$$

Eq. diff: $\frac{du}{dx} = a\frac{du}{dy}$

L'intégrale est une fonction <u>quelconque</u> de $(y+ax)$

Eq. d'une surf. de révolution: $u = \varphi(x^2+y^2)$

Eq. diff: $y\frac{du}{dx} = x\frac{du}{dy}$

L'intégrale est une fonction <u>indéterminée</u> de (x^2+y^2)

De même, l'intégrale gén. de l'éq. diff. du 2e ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

est: $u = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$

φ et ψ étant 2 fonctions indéterminées, représentant 2 surfaces cylindriques à génératrice parallèle au plan xt et à directrice quelconque. Ce sont deux <u>ondes</u> qui se déplacent avec la vitesse $\pm c$ $\left(\frac{dx}{dt} = \pm c\right)$ La double indétermination provient de ce que ni les élongations initiales ni les vitesses initiales ne sont données.

Intégrales particulières: $u = e^{\beta(x\pm ct)}$, $u = \cos\beta(x\pm ct)$, $u = \sin\beta(x\pm ct)$, $u = \sin\beta x \cos\beta ct$, etc.

---

(1) <u>Sauveur</u> a découvert la coexistence des vibrations harmoniques (1701-

Toute fonction linéaire de plusieurs intégrales particulières est une nouvelle intégrale (Euler)

L'éq. diff. : $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$

a pour int. gén. : $u = \varphi(x+yi) + \psi(x-yi)$

— En supposant une distribution de temp. initiale : linéaire

$$u = a \sin rx$$

l'éq. de Fourier : $\frac{du}{dt} = m \frac{d^2u}{dx^2}$

donne $\frac{du}{dt} = - mr^2 . a \sin rx = - mr^2 u$

L'int. gén. est $u = A e^{-mr^2t}$ (vitesse proportionnelle à la température)

(A val. initiale) $u = e^{-mr^2t} . a \sin rx$

Les températures tendent vers la temp. moyenne suivant une progression géométrique, en gardant une distribution sinusoïdale (elles ne s'égalisent qu'au bout d'un temps infini)

Plus généralement, si la distribution initiale est :

$$u = a_1 \sin r_1 x + a_2 \sin r_2 x + a_3 \sin r_3 x + \ldots\ldots$$

la loi de variation des températures est l'intégrale :

$$u = e^{-mr_1^2t} a_1 \sin r_1 x + e^{-mr_2^2t} a_2 \sin r_2 x + \ldots\ldots$$

Or Fourier a montré qu'on pouvait représenter une fonction quelconque (dans un intervalle fini ou même infini) par une série trigonométrique, de la forme (entre $-\pi$ et $+\pi$) :

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots\ldots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots\ldots$$

où les coefficients sont donnés par les formules :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx .$$

Exemples. La série : $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \dots$

prend les valeurs : $+\frac{\pi}{4}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$ de $+\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{3\pi}{2}$, etc.

Elle peut représenter la distribution initiale (uniforme) de la température d'un mur d'épaisseur l, en remplaçant x par $\frac{\pi x}{l}$. La loi de variation de cette temp. sera alors :

$$u = \frac{4u_0}{\pi}\left[e^{-\frac{m\pi^2}{l^2}t} \cdot \cos\frac{\pi x}{l} - \frac{e^{-\frac{9m\pi^2}{l^2}t}}{3} \cdot \cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{e^{-\frac{25m\pi^2}{l^2}t}}{5} \cdot \cos\frac{5\pi x}{l} \dots \right.$$

On voit que les cosinus de courte période décroissent plus rapidement ; par suite, la distribution se rapproche de plus en plus de la distribution sinusoïdale (analogie avec les cordes vibrantes ; les harmoniques disparaissent avant le son fondamental.)

(de la théorie)

Retour sur le développement de la conduction de la chaleur.

La théorie de Fourier est un modèle de théorie physique ; car elle repose, non sur une hypothèse, mais sur un fait d'expérience : la vitesse de variation de la temp. est prop. à leur différence ; et elle en développe toutes les conséquences logiques.

Ce fait peut s'exprimer autrement : Chaque point tend à prendre la température moyenne des points environnants ; et la vitesse de variation de sa temp. u est prop. à son excès sur cette moyenne $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ (figuré géom. par la courbure des courbes qui figurent les variations de temp. autour du point).

L'état stationnaire (régime permanent) correspond à :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \Delta u = 0.$$

Généralité de l'équation de Laplace. Soit $u = f(x, y, z)$.

En un point voisin, $u = f(x+h, y+k, z+l)$. Soit $\rho(\sqrt{h^2+k^2+l^2})$

une fonction de la distance qui exprime l'influence du 2e point sur le 1er. La valeur moyenne de u au voisinage du point (x, y, z) est donnée par la fraction :

$$\frac{\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x+h, y+k, z+l)\,\varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\,dh.dk.dl}{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\,dh\,dk\,dl}.$$

En développant $f(x+h, y+k, z+l)$ en série de Taylor, les termes du 1er degré en h, k, l disparaissent, par symétrie, et il reste :

$$u + \frac{1}{2}\Delta u \frac{\iiint_0^{\infty} h^2 \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\,dh.dk.dl}{\iiint_0^{\infty} \varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})\,dh\,dk\,dl} + \ldots\ldots$$

La fraction est une constante m qui ne dépend que de φ. Pour la conduction de la chaleur, $m = \frac{2k}{c\rho}$. Ainsi la différence entre u et la moyenne est prop.t à Δu. Tel est le sens phénoménologique de l'équation de Laplace, qui définit l'état stationnaire de la grandeur u.

– Théorie de la connaissance utilitaire et pratique.

Histoire de la théorie du rayonnement de la chaleur

Tschirnhausen (1699) a concentré la chaleur avec des miroirs et des lentilles. Scheele a nommé la chaleur rayonnante; Pictet (1790) l'a distinguée de la chaleur propagée : il a découvert le rayonnement du froid. Hutton (1794) identifie la chaleur et la lumière, tandis qu'Herschel (1800) distingue les rayons calorifiques des rayons lumineux : il a découvert les rayons infra-rouges. Rumford (1805) constate que les corps qui s'échauffent le plus vite se

refroidissent aussi vite, d'admet des radiations chaudes et froides.

Leslie emploie son cube avec un thermomètre différentiel à air : il constate que la chaleur rayonnée par une surface dans une direction est proportionnelle au cosinus de l'angle de cette direction avec la normale. Il remarque que le pouvoir émissif et le pouvoir réflecteur sont complémentaires.
(1804)

Lambert (1779.) calcule la déperdition de chaleur d'après la loi de Newton: $du = -au\,dt$ $\qquad u = Ve^{-at}$

Si le corps est en même temps soumis à une source de chaleur:
$du = k\,dt - au\,dt$ $\qquad u = \frac{k}{a} - \left(\frac{k}{a} - V\right)e^{-at}$

Lambert cherche une relation mathématique entre la tension de rupture d'un fil et la température de fusion du métal. Il déduit l'impénétrabilité du principe de contradiction.

Prévost (1809) distingue nettement le rayonnement de la conduction. Tous les corps rayonnent. L'égalité de temp. entre deux corps résulte de l'équilibre mobile de leurs deux rayonnements. ~~L'intensité du rayonnement~~ La quantité de chaleur échangée par rayonnement dépend de la nature des 2 corps en présence.

Fourier (1816-17) déduit les lois du rayonnement comme conditions nécessaires de l'équilibre thermique : 1° proportionnalité de l'émission et de l'absorption ; 2° loi du cosinus.

Kirchhoff spécifie la loi de prop. de l'émission et de l'absorption en l'appliquant à chaque longueur d'onde séparément, et à la lumière polarisée dans divers plans.

La loi de Newton serait vraie si le pouvoir émissif croissait proportionnellement à la température. Dulong et Petit ont trouvé qu'elle n'est vraie que pour de faibles différences de température.

Pour une même diff. de temp., si la température initiale croît en progr. arith. la vitesse de refroidissement croît en progr. géométrique

Clausius a démontré que le pouvoir rayonnant d'un corps dépend de l'indice de réfraction du milieu : il est en raison inverse du carré de la vitesse du rayonnement dans ce milieu (même quand les rayons sont réfléchis ou réfractés)

Retour sur le développement de la théorie du rayonnement.

On a commencé par considérer le froid et le chaud comme deux espèces distinctes, et par admettre des rayons de froid et des rayons de chaleur. Mais le chaud et le froid ne sont pas symétriques. L'identité de la chaleur et de la lumière achève de détruire cette symétrie : le corps qui éclaire est aussi celui qui échauffe.

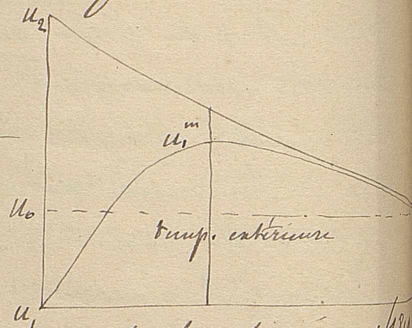
Prévost a remplacé la notion d'un flux unique de chaleur de A à B par l'idée de 2 flux contraires qu'échangent A et B. Cette idée est analogue à celle de la composition des mouvements simples & indépendants (Galilée). Fécondité déductive du principe de l'équilibre de temp. r. due à la variété des circonstances de cet équilibre : d'où autant de postulats distincts du maintien de l'équilibre. C'est un bel exemple de adaptation des idées aux faits.

Histoire du développement de la calorimétrie.

Richmann (1750) trouve la formule des échanges de chaleur entre deux masses d'un même corps : $V = \frac{mu + m'u'}{m+m'}$

Il confond encore température et quantité de chaleur

Boerhave (1732) d'après les expériences de Fahrenheit, croit que les quantités de chaleur sont proport. aux volumes.
Black (1804) distingue la température et la quantité de chaleur, et conçoit la capacité spécifique des corps pour la chaleur. Il admet que dans un mélange la quantité de chaleur perdue par l'un des corps est égale à la quant. de chal. gagnée par l'autre.
Lambert aussi avait distingué la masse de chaleur et la force ou tension de la chaleur, mesurée par la température. Mais il considère le calorique comme composé de particules.
Black découvre la chaleur latente de fusion de la glace, et la mesure par le temps que la glace met à fondre. Il explique l'expérience de Fahrenheit sur la congélation de l'eau refroidie au-dessous de 0°, qu' Irvine et Crawford expliquaient par la diminution de la chaleur spécifique de l'eau qui se congèle.
Lavoisier et Laplace (1780) ont employé la fusion de la glace à la détermination des chaleurs spécifiques. La méthode des mélanges comporte une cause d'erreur : le refroidissement du calorimètre. Courbes de la température du corps et du calorimètre.



Regnault détermine empiriquement les pertes de chaleur du calorimètre pour chaque température.
Dulong et Petit déterminent les chaleurs spécifiques. Leur loi relative aux poids atomiques (181.)
Black découvre ensuite la chaleur latente de vaporisation, et la mesure par le temps qu'une masse d'eau met à se vaporiser en bouillant (constance de la température d'ébullition.) Il

explique le phénomène de surébullition ou surchauffe de l'eau.
La vapeur rend sa chaleur latente en se condensant. Watt détermina par là la chaleur latente de vaporisation.
Black considérait les gaz comme analogues aux vapeurs, et par suite comme liquéfiables. Ses idées sur la méthode

Critique des concepts calorimétriques.

La définition ordinaire de la calorie enferme une faute logique: Elle suppose le concept à définir (quantité de chaleur) et repose sur la conception matérielle de la chaleur. Il vaudrait mieux définir arbitrairement, mais explicitement, la quantité de chaleur par le produit mu (m poids, u variation de tempér.) Mais pourquoi appeler ce produit une grandeur?

– Renaldini voulait graduer un thermomètre en partant de 2 temp. prises pour points fixes, et en prenant comme moyenne la temp. du mélange de 2 masses d'eau égales. Seulement cette échelle calorimétrique eût été relative au corps particulier pris pour véhicule de la chaleur.
L'échelle thermométrique étant autrement définie, il n'est nullement évident que la temp. d'un mélange de masses égales doit être la moyenne des temp. initiales: et en fait, cela ne peut être vrai avec deux substances thermométriques.

– Origine de la conception matérielle de la chaleur: comme les corps s'échauffent aux dépens les uns des autres, la chaleur semble passer de l'un à l'autre comme un fluide dont la masse serait constante. L'équation de Richmann:

$$mu + m'u' = (m+m')V$$

peut s'écrire:

$$m(u-V) = m'(V-u')$$

ou:

$$m\theta + m'\theta' = 0$$

On peut appeler $m\theta$ quantité de chaleur sans donner à cette expression un sens matériel. C'est l'expérience seule qui nous apprend que cette quantité reste constante en passant d'un corps à l'autre (quand ces corps sont homogènes).

Dans le mélange de corps hétérogènes, l'équation n'est plus vraie. On pourrait abandonner la signification métrique de $m\theta$. Black a préféré conserver le concept de quantité de chaleur (constante) en affectant l'un des corps (autre que l'eau) d'un coefficient s' tel que l'on ait encore :

$$m\theta + s'm'\theta' = 0$$

On généralise aussi l'éq. de Richmann en considérant $s m \theta$ comme la quantité de chaleur gagnée par le corps de capacité s.

D'une manière plus abstraite et plus scientifique, on pourrait définir la capacité comme suit : Deux corps ont des capacités ~~égales quand~~ en raison inverse des variations de température qu'ils se communiquent : $\frac{ms}{m's'} = -\frac{\theta'}{\theta}$

Mais alors il faut prouver que deux capacités égales à une même 3e sont égales entre elles ; ce qui paraissait évident quand on définissait la capacité par la quantité de chaleur nécessaire pour élever la temp. de 1°. Il n'y a aucune nécessité logique à cela ; mais cela contredit les faits d'expérience ?

— On conçut d'abord la chaleur spécifique comme une constante indépendante de la température. La fausseté de cette présomption a obligé à préciser la définition de la calorie en indiquant la température d'où l'on part.

Si la chaleur spécifique était la même fonction de la temp. pour tous les corps, on pourrait déterminer une échelle de températures pour laquelle la chaleur spécifique serait constante

On pourrait aussi adopter l'échelle calorimétrique de Renaldini, mais les températures ainsi obtenues ne vérifieraient plus l'axiome de l'égalité, ce qui serait un bien plus grand inconvénient que la variation des chaleurs spécifiques avec la température.

Analogie du produit $x\theta$ (x capacité calorique) avec le produit mécanique mv.

En somme, en dehors de toute représentation matérielle le fait est que les produits de la forme $ms\theta$ s'équivalent ou se compensent. On a modifié et compliqué le premier concept pour conserver la formule de l'équivalence (ou de la constance.) On est ainsi amené à se demander ce que devient la chaleur perdue par fusion ou vaporisation, et à concevoir les chaleurs latentes. Mais rien n'oblige à considérer ces quantités comme des chaleurs: tout ce qu'on sait, c'est qu'elles équivalent à des quantités de chaleur qui disparaissent. (déterminées)

Propriétés calorimétriques des gaz.

Difficulté de déterminer la chaleur spécifique des gaz (à pression constante.) Méthode de Delaroche et Bérard (1813) Haycroft découvre que tous les gaz ont la même capacité calorique à volume égal, sous la même pression [1824.] Regnault confirme les résultats de Delaroche et Bérard, et trouve que la chaleur spécifique des gaz (rapportée au poids) est indépendante de la température et de la pression (pour les gaz qui suivent la loi de Mariotte.) Il découvre l'énorme chaleur spécifique de l'hydrogène (3,4 par rapp. à l'eau)

Dalton remarque l'échauffement des gaz par compression, et leur refroidissement par dilatation. Il attribue une capacité moindre à l'air comprimé ; et par suite une capacité plus grande au vide qu'à l'air.

Gay-Lussac (avec Laplace et Berthollet) constate qu'une masse d'air qui se détend dans le vide ne change pas de température ; donc la chaleur spécifique ne dépend pas des variations de volume ~~; toute~~ On s'imaginait alors, sous l'influence de la conception matérielle de la chaleur, que le calorique était un fluide qui remplissait le vide plus que les corps, ceux-ci jouant à son égard le rôle d'éponges. (Biot par ex.) On s'expliquait ainsi que la chaleur spécifique à pression constante fût plus grande que celle à volume constant. L'expérience de Clément et Desormes (1819) permet de déterminer le rapport $\frac{C}{c}$, et par suite c. Mais le but de ces auteurs était de déterminer le zéro absolu et la chaleur spécifique du vide. C'est Laplace qui interpréta leur expérience ~~pour~~ de manière à en tirer $\frac{C}{c}$ pour calculer la vitesse du son. Newton avait calculé cette vitesse, et avait trouvé la formule :

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

(E pression de l'air, ρ densité)

La valeur calculée étant plus faible que la valeur observée, Laplace (1816) montra que la force devait être multipliée par $\frac{C}{c}$, et par suite que :

$$V = \sqrt{\frac{C}{c}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Il indiqua cette méthode pour calculer le rapport $\frac{C}{c}$. C'est celle que Dulong a appliquée expérimentalement à divers gaz. Poisson (1829) supposant $\frac{C}{c}$ constant, démontre l'équation :

$$pv^{\frac{C}{c}} = \text{Const.}$$

valable pour toute transf. adiabatique d'un gaz (1823).

Développement de la thermodynamique. Principe de Carnot.

La théorie mécanique de la chaleur est fort ancienne (Huyghens). Lavoisier et Laplace en ont l'idée : ils y sont conduits par le principe de la conservation des forces vives (1780-4.)

Rumford fait des expériences sur la chaleur dégagée par le forage des canons (1798). De ce que la quantité de chaleur ainsi produite est illimitée, il conclut en faveur de la théorie mécanique, contre la théorie matérielle.

Humphrey Davy a les mêmes idées ; il produit la chaleur dans le vide par le frottement d'une plaque de métal sur la glace.

Sadi Carnot (1824) adopte la théorie mécanique, car il invoque l'impossibilité du mouvement perpétuel. Il maintient encore la constance de la quantité de chaleur. (La théorie matérielle n'exclut pas absolument la thermodynamique : on aurait pu admettre une chaleur latente pour le travail comme pour la vaporisation.)

Carnot considère le travail fourni par le passage d'une quantité de chaleur d'une temp. à une autre ; et il se demande si ce travail dépend de la matière employée comme véhicule de la chaleur. Or s'il en dépendait, on pourrait avec deux machines thermiques différentes réaliser le mouvement perpétuel.

Il y a donc un travail maximum qui correspond à une chute déterminée de chaleur. Il est atteint quand toute variation de température est conditionnée par une variation de volume. Pour le déterminer, Carnot imagine son cycle réversible : le corps revient exactement à son état initial ; il n'y a jamais contact entre corps de différentes températures, donc pas de perte de chaleur sans travail ; enfin toutes les

variations de température correspondent à des variations de volume donc à des travaux. Le cycle étant réversible on peut faire remonter la même quantité de chaleur à la température primitive en dépensant le même travail.
Le travail W est donc fonction de la quantité de chaleur Q et des deux températures t_1, t_2 (Remarque: Le cycle est ~~idéal~~ ~~et~~ irréalisable car il demande au moins des différences de temp. infiniment petites, et par suite un temps infini. C'est un cas limite idéal de processus réels irréversibles.)
Applications: La quantité de chaleur mise en jeu dans le passage de $p_0 v_0$ à $p v$ à temp. const. est la même pour tous les gaz parfaits. — Carnot calcule le rapport $\frac{C}{c}$.
— Quand le volume d'une même masse de gaz varie dans le même rapport (à temp. const.) la quantité de chaleur mise en jeu est la même.
Carnot a calculé le travail correspondant à la chute de 1 calorie pour 1 degré, pour différentes vapeurs et a trouvé des nombres passablement concordants. Enfin il compare les diverses machines thermiques au p. de vue du rendement.
Clapeyron a vulgarisé l'œuvre de Carnot par son commentaire analytique et graphique (1834)
Représentation du cycle de Carnot, l'aire de la courbe mesurant le travail. Clapeyron croit que toute la chaleur empruntée à la source chaude est cédée à la source froide. Il a néanmoins l'idée de l'équivalence de la chaleur et du travail.
Clapeyron calcule le travail maximum; il prend le rapport du travail à la quantité de chaleur mise en jeu dans un cycle de Carnot (inf. petit) et le pose $= \frac{dt}{C}$, C étant une fonction de la température seulement (la même pour tous les corps

La chaleur latente de vaporisation des diverses vapeurs à la même température est proportionnelle à $\frac{dp}{dt}$:

$$k = C \frac{dp}{dt}.$$

La chaleur de compression de tous les corps à la même température est proportionnelle à $\frac{dv}{dt}$ (coefficient de dilatation)

$$dQ = -C\, dp \frac{dv}{dt}.$$

Clapeyron a calculé la fonction $\frac{1}{C}$ au moyen des vapeurs. Il a trouvé des nombres voisins de celui de Carnot.

William Thomson (1848) a été conduit par la théorie de Carnot à inventer une échelle thermométrique absolue, c.à.d. indépendante de la nature du corps thermom. D'après Clapeyron, la chute d'une quantité de chaleur de 1 degré ne produit pas le même travail à toutes les températures centigrades ; la fonction $\frac{1}{C}$ va décroissant quand la temp. croît. W. Thomson choisit des degrés tels que le travail correspondant à une même chute de chaleur soit le même pour tous les degrés.

Il admet encore avec Carnot la constance de la quantité de chaleur, bien qu'il connaisse les travaux de Joule. Il ne conçoit pas la possibilité de convertir la chaleur en travail.

James ~~W.~~ Thomson (1849) remarque que l'eau en se congelant se dilate, et par suite peut fournir du travail sans chute de chaleur. Son frère W. ~~James~~ Th. déduit du principe de Carnot que la pression abaisse le point de congélation de l'eau, de sorte que le travail effectué contre cette pression correspond à une chute de chaleur. James Th. calcule cet abaissement. W. Thomson le vérifie expérimentalement.


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Développement de la Thermodynamique

Principe de Mayer et de Joule. Principe de l'énergie.

Carnot, dans son Journal posthume, ne croyait plus à la constance de la quantité de chaleur, et avait l'idée de l'équivalence de la chaleur et du travail; il a même essayé de calculer l'équivalent mécanique. Il avait l'idée de la conservation de l'énergie (puissance motrice). Il est mort en 1832.

Séguin (1839) avait reçu de son oncle Montgolfier l'idée d'une identité de nature entre la chaleur et le travail; il savait que la vapeur qui travaille perd une partie de sa chaleur.

Jr R. Mayer, médecin de Heilbronn, conçoit l'équivalence de la chaleur et du travail, et détermine l'équivalent mécanique (1842). Colding, ingénieur en chef de Copenhague, arrivait en même temps à l'idée d'une proportionnalité entre la chaleur et le travail, et évaluait l'équivalent mécanique (1843). Il s'inspirait de l'idée métaphysique de l'indestructibilité des forces naturelles, et invoquait l'impossibilité du mouvement perpétuel. La même année (1843) Joule commençait ses expériences. — Réflexions sur la simultanéité de ces découvertes, et sur la vanité des discussions de priorité.

Mayer est amené à sa découverte par la remarque que le sang veineux est rouge dans les pays chauds (à Java). Il était presque ignorant en Physique et commettait des fautes grossières de mathématiques. Il avait formé lui-même tous ses concepts, d'où l'originalité de ses vues, presque inintelligibles pour les contemporains imbus des théories régnantes. Il part de considérations métaphysiques sur les forces (et sur leur égalité nécessaire avec leurs effets (causa aequat effectum) sur leur indestructibilité.

Il conçoit sous le nom de force le travail ou l'énergie comme une substance, d'ailleurs immatérielle. Il a été guidé par un instinct formel, par un besoin dont il ne se rendait pas compte lui-même.
Il a vu qu'il n'était pas besoin d'expériences nouvelles pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur. Il l'a calculé au moyen de la différence entre C et c; ses données inexactes l'ont conduit au nombre 365; les données modernes donneraient 423,8.
Dans un 2e article (1845), Mayer généralise l'équivalence de la chaleur et du travail, et la conservation de la force. Dans sa Dynamique du ciel (1848) il considère le soleil comme source de toute énergie, et émet une hypothèse mécanique pour expliquer cette énergie.
Mayer se distingue par l'originalité et la généralité de ses vues. C'est un homme de génie presque dénué de talent.
Helmholz développe les idées de Mayer dans son livre Sur la conservation de la force (1847). Il les précise et les renforce de toute l'érudition physique qui manquait à Mayer. Il remplit le programme tracé par Mayer en appliquant à la Physique, à la Chimie et à la Physiologie son principe. Il se propose de tirer toutes les conséquences de l'impossibilité du mouvement perpétuel (comme Carnot). Constance de la somme des forces vives et des forces de tension. Équivalent mécanique de la chaleur. Équiv. méc. des phén. électriques (Riess). Électrolyse. Travail des courants. ~~Le phén.~~ L'énergie thermo électrique provient du phén. Peltier. Calcul de la force électromotrice d'induction magnétique

L'impropriété du mot « force » est commune à tous ces auteurs.
Le mot « travail » introduit en Mécanique par Poncelet (1826)
est employé seulement par Clausius (1850) et Thomson (1851).
Le mot « énergie » introduit en Mécanique par Th. Young (1800)
n'est employé au sens général que par Rankine et les Anglais.

Depuis 1840, <u>Joule</u> avait découvert sa loi de la chaleur voltaïque
et savait que la chaleur dégagée dans le circuit est égale à la
chaleur des transformations chimiques qui s'effectuent dans la pile.
Mais il se demanda si c'était de la chaleur <u>créée</u> ou seulement
<u>transportée</u> par le courant. Pour trancher cette question, il
employa les courants d'induction, et vérifia encore sa loi.
Ainsi la chaleur peut être produite par le travail. Ensuite,
il intercale une bobine d'induction dans le circuit d'une pile,
et trouve qu'on peut augmenter ou diminuer l'intensité du
courant en faisant tourner la bobine dans un sens ou dans l'autre,
et par suite produire ou détruire de la chaleur mécaniquement.
C'est un 1er moyen d'évaluer l'équivalent mécanique (1843).
Un 2e consiste à échauffer l'eau en la forçant à passer dans
des tubes fins. — Joule invoque en faveur de l'équivalence
des raisons métaphysico-théologiques qu'il ne faut pas prendre
bien au sérieux. Ses préoccupations sont plutôt <u>pratiques</u>.

En 1845, 3e ~~dét~~ méthode pour déterminer l'équivalent
par la compression de l'air dans un calorimètre, le travail
étant calculé par la loi de Mariotte.

<u>Joule</u> en conclut que la capacité calorique d'une masse d'air
ne dépend pas de son volume, et répète l'expérience de Gay Lussac :
détente d'une masse d'air dans le vide : ni travail ni chaleur.
Inversement, il ~~mesure~~ évalue l'équivalent par la détente d'une masse
d'air.

De 1845 à 1849, il détermine l'équivalent par les expériences bien connues sur le frottement des liquides. Hirn (Théorie mécanique de la chaleur, 1856) a trouvé que la vapeur perd de la chaleur en travaillant. En 1858, il publie sa détermination de l'équivalent mécanique par l'écrasement du plomb. Il étudie la transformation inverse de la chaleur en travail dans les machines à vapeur. Il applique la Thermodynamique à la Physiologie, en évaluant la chaleur qui correspond à un travail musculaire (positif ou négatif). Pour lui, le principe de l'énergie a un caractère rationnel et a priori. (1)

Développement de la Thermodynamique
Union des principes.

Difficulté de accorder ensemble les deux principes: La chaleur en produisant du travail se conserve-t-elle ou se dépense-t-elle? Et quand il y a chute de chaleur sans production de travail comment le principe de la conservation de l'énergie est-il satisfait? W. Thomson en 1849 admettait encore l'hypothèse fondamentale de Carnot, mais concevait la possibilité de l'abandonner pour résoudre les difficultés. Il ne considérait pas comme possible la transformation de chaleur en travail, bien qu'il connût par Joule la transformation inverse. Il en appelait à l'expérience pour en décider; mais c'est Clausius qui trouva la conciliation des deux principes par une révision critique (1850.)
Renonçant à l'hypothèse de Carnot (constance de la quantité de chaleur) il admet qu'une partie de la chaleur se transforme

(1) Conclusion : l'un des principes vient de Carnot tout seul, l'autre n'appartient ni à un seul homme ni à un seul pays.

en travail (pr. de l'équivalence) et que le reste tombe à une temp. inférieure (pr. de Carnot). En général, Clausius n'a pas apporté de principe nouveau; mais il a éclairci et systématisé logiquement les vérités découvertes auparavant en les déduisant des deux principes mathématiq^t formulés.
Définition des coefficients thermiques des gaz. Équation du principe de l'équivalence: $dQ = dU + Apdv$
On en déduit: $C - c = AR$ $\quad pv^{\frac{C}{c}} = \text{const.}$ (Poisson.)
Selon Carnot, le travail du cycle est: $W = F(Q, t_1 t_2)$
ou: $W = Q . F(t_1 t_2)$
Selon Joule-Mayer, $W = JQ'$
Donc: $JQ' = Q . F(t_1 t_2)$
Q est la chaleur cédée par la source chaude; $Q - Q'$ est la chaleur reçue par la source froide.
La fonction de Carnot (Clapeyron) est: $C = AT$.
W. Thomson a cherché d'abord à calculer le travail correspondant à la chute d'une quantité de chaleur, mais en supposant que la quantité de chaleur passe tout entière de la source chaude à la source froide, ce qui était faux et vicie son résultat.
En 1851, il corrige sa théorie, et pose en principe qu'il est impossible de produire un travail, avec des corps inorganiques, en refroidissant un corps au-dessous de la temp^s minima de son entourage. C'est une autre forme du principe de Carnot-Clausius. Il trouve l'équation:

$$\log \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{J} \int_{T_2}^{T_1} \mu \, dt$$

μ étant la fonction $\frac{1}{C}$ (rapport de dW à dQ, fonction de t)

D'après les recherches de Joule Thomson trouve pour les gaz :

$$\mu = \frac{J}{T}$$

L'équation précédente donne : $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ (1)

d'où : $W = JQ_1\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)$

Ainsi il n'y a jamais qu'une partie de la chaleur qui puisse être convertie en travail, le reste est perdu (dégradé) sans retour. Thomson en conclut la tendance universelle de la nature à la dissipation de l'énergie mécanique (1852)

La quantité d'énergie dissipée dans une transformation est :

$\int \frac{dQ}{T}$ (= 0 dans un cycle réversible)

Clausius est arrivé peu après aux mêmes résultats (1854)

Etant donné que toute ~~chute de chaleur~~ transformation de chaleur en travail s'accompagne nécessairement d'une chute de chaleur il cherche les valeurs équivalentes de ces 2 transformations.

Soit Q la chaleur transmise, Q' la chaleur transformée en travail :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

ou : $\frac{Q'}{Q + Q'} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ (coefficient économique).

La valeur équivalente d'une quantité de chaleur Q est $\frac{Q}{T}$.

On a toujours : $\int \frac{dQ}{T} \geqq 0$ (= dans un cycle réversible)

Dans le cas d'une transformation réversible, (2) $\int \frac{dQ}{T} = dS$ différentielle exacte. S est l'entropie. (Gibbs)

Une transformation adiabatique (Rankine) est isentropique

Dans toute transformation irréversible, l'entropie augmente : il y a une perte d'énergie qui ne peut être compensée.

L'énergie du monde est constante ; son entropie tend vers un maximum.

(1) Cette proportion est la base de la température absolue (1854)

(2) cela suppose que les corps qui se touchent sont à la même température.

Analogie de l'entropie avec la température : c'est un niveau, une caractéristique de l'état des corps.

Application de la Thermodynamique à l'Electricité : Thomson (1851, 1854) Clausius (1852, 1853) Explication de la loi de Joule, des courant thermo électrique (par le phén. Peltier) Découverte de l'effet Thomson.

Rankine (1851-53) contribue à édifier la Thermodynamique.

– En résumé, les travaux de Thomson et de Clausius sont équivalents, et leurs mérites égaux ; mais Thomson est plus clair et plus direct, Clausius est formaliste et compliqué.

Résumé des principes de la Thermodynamique

En faisant subir à un gaz un cycle de Carnot entre 2 temp. infiniment voisines, on a : $W = R\,dt \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$

et ~~le travail~~ $Q = \frac{RT}{J} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v}$

d'où : $\frac{W}{Q} = \frac{J\,dt}{T}$ Or : $W = J\,dQ$

$\frac{dQ}{Q} = \frac{dT}{T}$ d'où ; $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

Tous les faits d'expérience sur lesquels repose la Thermodynamique étaient acquis du temps de Carnot. S'il avait compris ~~fait à~~ l'expérience de Gay-Lussac, il aurait pu construire toute la Thermodynamique (à la lumière du princ. de l'équiv.)

L'échelle de température absolue (thermodynamique)

Pour un gaz qui suit exactement la loi de Mariotte-Gay Lussac la température absolue coïnciderait avec la température d'Amontons (mesurée par ~~thermomot~~ la pression du thermomètre à air). Mais en fait, le travail intérieur des gaz n'est pas nul, c.à.d.

que leur chaleur spécifique n'est pas indépendante du volume. Soit μdt le rapport du travail à la chaleur dans un cycle inf. mince dt (températures arbitraires ; μ, fonction de Carnot, à déterminer ~~~~ échelle par expérience) ; on a :

$$\frac{JdQ}{Q} = \mu dt$$

On posera, par définition : $T = \frac{J}{\mu}$,

et l'on aura :

$$\frac{JdQ}{Q} + \frac{Jd\mu}{\mu} = 0$$

d'où :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

<u>Thomson et Joule</u> ont déterminé μ par expérience en faisant passer de l'air sous pression à travers un bouchon poreux : il y a un léger refroidissement qui ~~pro~~ vient de ce que la chaleur due au frottement (c.à.d. au travail effectué) ne compense pas tout à fait le refroidissement dû à la détente ; ce qui prouve qu'il y a un travail intérieur de dilatation (1852.) Ils ont ainsi comparé les températures absolues aux indications du thermomètre à air, à volume constant, qui supporte à 0° la pression de 760^{mm} ; ~~Ils ont trouvé~~ en faisant coïncider 0 et 100, ils ont trouvé des différences ~~au plus~~ de +4 centièmes au plus entre 0 et 100, et de − 4 dixièmes au plus vers 300°.

<u>Retour sur le développement de la Thermodynamique</u>

<u>Les sources du principe de l'énergie.</u>

Une foule de ~~phén.~~ transf. physiques et chimiques peuvent être produites en dépensant du travail. Si ~~la~~ ces transf. ~~inverses~~ sont réversibles elles fournissent un travail égal ; ~~c'est~~ c'est le principe de la conservation de l'énergie, au sens gén. (énergie = ce qui équivaut à du travail)

Ce principe a une triple racine: logique, formelle, expérimentale.
Il a paru évident a priori à bien des auteurs (Mayer, Joule).
Il reposait sur la conception mécaniste du monde, qui aboutit
à nier la réalité du monde sensible et à en faire une énigme.
Les phén. physiques ne s'expliquent pas par les phén. mécaniques,
mais ils peuvent se représenter par eux, grâce à leur analogie.
C'est l'expérience seule qui a montré l'équivalence de la chaleur
et du travail, et a permis d'évaluer l'équivalent.
Mais le principe répond aussi à un besoin formel de l'esprit
(surtout chez Mayer), le besoin de se figurer substantiellement
les phénomènes. De la proportionnalité de la chaleur et du
travail on conclut à leur identité de nature, puis à la constance
de leur somme, considérée comme une substance.
Il ne faut pas croire que la découverte de ce principe ait prouvé
que la chaleur n'était pas une matière, mais un mouvement.
Dans toute loi physique on peut trouver une équivalence
qui peut se formuler comme ~~une~~ la constance d'une substance
(ex: $v = \sqrt{2gh}$.) Il n'y a pas d'équivalent mécanique de la
masse électrique, mais bien de l'énergie électrique; on aurait
pu appeler celle-ci masse, et poser en principe la conservation
de la quantité d'électricité. Inversement, il vaudrait mieux
dire « énergie calorique » que « quantité de chaleur ».
C'est la même illusion substantialiste qui nous fait regarder
O et H comme subsistant dans l'eau.
Le principe de l'énergie est analogue à l'impossibilité
du mouvement perpétuel (présomption antérieure à la
fondation de la Mécanique, et qui a servi à la fonder.)
~~C'est~~ Il en est l'extension à toute la Physique, avec la substantialisation
du travail et des quantités équivalentes. Ce n'est

pas une loi ou un fait nouveau, mais une forme de conception de faits antérieurement connus. Rien de mystique.

Extension du principe de Carnot - Clausius. Conformité et différences des énergies. Limites du principe de l'énergie.

L'élaboration de la connaissance est réglée par la loi d'économie: on rapporte toujours les nouveaux faits aux anciens concepts. Carnot a été guidé par l'analogie de la chute d'eau. Zeuner a représenté le cycle de Carnot par un processus de masses pesantes: $\frac{Q}{T}$ est pour lui le poids de la chaleur. On peut imaginer une figuration hydrostatique, où le niveau figure la température.

On peut aussi imaginer une figuration électrique, la température étant figurée par le potentiel. En gén. quand une énergie W tombe du niveau V_1 au niveau V_2, l'énergie W' se transformant en d'autres formes, on a l'équation:

$$-\frac{W'}{V_1} + W\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = 0$$

ou:

$$-\frac{W_1}{V_1} + \frac{W_2}{V_2} = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} W_1 = W + W' \\ W_2 = W \end{array}\right)$$

et le coefficient économique est $\frac{W'}{W+W'} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$

La considération du cycle réversible n'est qu'accessoire, elle est destinée à évaluer le travail maximum qui correspond à une chute de chaleur. La quantité $\frac{W}{V}$ est la valeur équivalente de l'énergie W au niveau V: la somme des quantités $\frac{W}{V}$ reste constante.

Le principe de Carnot vaut donc pour toutes les formes d'énergie, mais elles présentent des différences. La chaleur est

énergie qui puisse descendre de niveau sans produire de travail ni d'autre énergie équivalente. Pour toutes les autres, une transformation est nécessairement liée à toute chute d'énergie (les deux principes de la Th. ne sont donc pas nécessairement impliqués l'un dans l'autre, bien qu'ils expriment deux faces inséparables d'un seul et même processus.) Ainsi l'entropie d'un système ne croît que dans le cas de la chaleur (N. B. Ne pas la confondre avec $\Sigma \frac{Q}{T}$, somme des capacités, qui reste constante.)

Autre différence: la chaleur est la seule énergie dont le zéro ne soit pas arbitraire, parce que les phén. dépendent des températures absolues (ex: la pression, la fusion, la vaporisation) et non pas seulement de leurs différences. Cela ne veut pas dire qu'il ne puisse s'effectuer du travail au-dessous du zéro absolu.

— L'équivalence des énergies n'a rien de surprenant ni de mystérieux: les notions mécaniques formées les premières, ont servi de modèles aux notions physiques (ex: masses électriques, potentiel électrique). La conception de la chaleur comme énergie tient au hasard heureux qui fait que la capacité calorique des gaz varie peu avec la temp., et que les températures sont proportionnelles (sensiblement) aux pressions, de sorte que la quantité de chaleur correspondant à un degré est à peu près prop. à l'énergie calorique, c.à.d. au travail du gaz. Il y avait une coïncidence approximative entre les températures usuelles et les températures absolues.

La conformité des énergies n'est pas une loi de la nature, elle provient de l'uniformité de nos conceptions. Le concept de substance s'impose à notre esprit: or il ne peut s'appliquer qu'aux relations ou lois des phén., seules permanentes. Il s'exprime math.t par la constance d'une somme: toute

équation peut être ramenée à cette forme (ex: loi de Mariotte).
Pour maintenir cette constance, Black admettait des
chaleurs latentes; nous admettons des énergies équivalentes.
De même pour le principe de l'entropie : Clausius a
choisi tout exprès la valeur équivalente $\frac{Q}{T}$, parce que
$\Sigma \frac{Q}{T} = 0$ dans un cycle réversible, où la chaleur
produit tout son effet mécanique, sans perte aucune.
Dans le phén. des mélanges, c'est au contraire la somme
des quantités de chaleur échangées (ΣQ) qui est constante ($=0$).
Ainsi toutes ces constantes sont relatives à certains
ordres de phén. et les principes correspondants ne valent
que pour ceux-ci. Il ne faut pas leur attribuer une valeur
générale et illimitée. L'énergie et l'entropie de l'univers
n'ont pas de sens : ce ne sont pas des grandeurs mesurables.

Le domaine frontière de la Physique et de la Chimie.

James Thomson (1873) a distingué les trois états ou phases
(Gibbs) d'un corps, comme l'eau. Coordonnées p, t :
il y a une courbe qui sépare l'état liquide de l'état
gazeux; c'est la courbe des tensions max de la vapeur.
Une autre courbe sépare l'état solide de l'état liquide:
c'est la courbe des points de congélation (variables suivant
la pression). Enfin une 3e courbe sépare l'état solide de
l'état gazeux : elle part du point de intersection des 2
~~premières~~ autres, mais ne coïncide pas avec la 1e, comme l'a cru
Regnault : cela résulte du principe de Carnot.
Problème de la force électromotrice des piles. L'équivalence
de la chaleur voltaïque et de la chaleur chimique (Thomson

Helmholtz) n'est vrai que pour les piles qui ne s'échauffent ni ne se refroidissent (Daniell.) En tout cas, on peut employer un cycle réversible et lui appliquer le principe de Carnot.

Le travail maximum (correspondant à un cycle réversible) est pour Helmholtz une perte d'énergie libre : $V = W - Q$. W travail effectué par le système, Q chaleur reçue pendant le cycle transf. réversible. En vertu du principe de Carnot $\frac{dW}{Q} = \frac{dT}{T}$ une

d'où : $$W - V = T\frac{dW}{dT}.$$

L'énergie libre $F = -H$ fonction caractéristique de Massieu :

$$H = TS - U \qquad S = \frac{\partial H}{\partial T}, \qquad p = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

Rapport des processus physiques et chimiques.

Loin de se réduire à la Physique, la Chimie, science plus générale et plus complexe, l'englobera peut-être un jour. De même la Physique ne se réduit pas à la Mécanique mais les lois mécaniques sont des cas particuliers & simples des lois physiques.

Les phén. physiques n'altèrent qu'une partie des qualités des corps ; les phén. chimiques les altèrent toutes ensemble. S'il y a un potentiel chimique (niveau), il est discontinu car les phén. chimiques ~~sont~~ s'effectuent entre des masses discrètes et entre des états discrets : c'est même cette discontinuité qui est le fondement de l'hypothèse des atomes (simple image qu'il ne faut pas prendre au sérieux) Le potentiel chimique est peut-être une multiplicité à plusieurs dimensions, ce qui n'est pas étonnant ni exceptionnel dans la science. — Les phén. chimiques sont plus profonds que

les phén. physiques, car ils suppriment les équations auxquelles obéissent ceux-ci, et les remplacent par d'autres.

Toutes nos sensations sont liées à des phénomènes chimiques, même nos sensations d'espace(!) On arrivera peut-être à découvrir les propriétés de l'espace par la Chimie (!!) L'action à distance ne distingue pas les phén. physiques des phén. chimiques.

Opposition entre la Physique mécanique et phénoménologique.

Les hypothèses métaphysiques (c.à d. imaginatives) doivent servir de moyens de recherche, mais être exclues du résultat des recherches. Leur utilité historique ne prouve pas leur vérité; les analogies mécaniques ne prouvent pas les identités. La mythologie mécanique se réduit à une mythologie algébrique. Pourtant bien des savants ont été dupes de leurs propres fictions. Quand Boltzmann a découvert l'identité du principe de Carnot et du principe de la moindre action, il n'a fait que répéter l'analogie connue entre la chaleur et le travail, mais n'a nullement prouvé que la chaleur soit une force vive. De même, quand on essaie d'interpréter mécaniq. le 2e principe de la th., ce ne sont pas les hypothèses moléculaires qui confirment le principe, mais au contraire (Wald, die Energie, 1889.)

Le développement de la science

Conception utilitaire et pratique de la science: a pour but la conservation et l'amélioration de la vie humaine. Division du travail; méthodes économiques. Le but de la science est de construire une image du monde, la plus stable possible

Le sens du merveilleux.

La science commence par l'observation de phénomènes nouveaux, insolites, imprévus qui sollicitent une explication. Aussi est-elle liée à l'origine à la magie, à la sorcellerie. Age théologique, explications anthropomorphiques, fétichisme (il en subsiste des traces dans la science moderne). Assimilation du sauvage à l'enfant. Extension illégitime de la personnalité (consciente) à tous les agents naturels. Darwin a montré que des habitudes utiles à l'origine persistent et peuvent devenir nuisibles. Ainsi le besoin du merveilleux subsiste chez certains savants: critique du spiritisme, de l'homoeopathie. Eloge de la science et des véritables miracles qu'elle opère. — L'observation du merveilleux n'est que le 1er stade: il faut le réduire et l'expliquer; l'auteur raille les expériences de suggestion & d'occultisme. Les obscurantistes n'ont pas le droit d'invoquer les lacunes de la science pour y introduire leurs fantaisies; la science seule peut combler ses propres lacunes. Elle consiste à montrer que le merveilleux n'est pas merveilleux. La croyance à l'existence de l'agent électrique comme substance, en dehors des phénomènes, est encore du mysticisme.

Transformation et adaptation des idées en Physique.

On peut appliquer aux pensées les lois de l'évolution formulées par Darwin pour les organismes. L'antithèse apparente de l'hérédité et de l'adaptation se résout par la tendance de chaque organisme vers un état d'équilibre stable (comme les systèmes physiques, selon Boltzmann). Le principe de stabilité réconcilie le principe de permanence et celui de changement.

L'adaptation de nos idées aux faits, à mesure que croît notre champ d'expérience, s'explique par l'association. Elle ne garantit nullement la valeur objective de nos prophéties, surtout quand elles dépassent le champ de notre expérience actuelle. Quand notre champ s'étend, des nouveaux faits entrent en conflit avec nos habitudes de pensée, d'où conflit, qui aboutit à l'adaptation de celles-ci à ceux-là : exemple : progrès des idées sur la gravitation. C'est le processus général de l'évolution biologique (ex. emprunté aux animaux) Cela nous explique que les anciennes façons de penser persistent si obstinément, et s'imposent aux faits nouveaux avec tyrannie : elles luttent pour la vie. Toute ~~expl~~ hypothèse consiste à se représenter les faits nouveaux sous la forme de faits anciens plus connus, c.à.d plus habituels. La naissance des théories n'est pas besoin d'une méthode savante, mais d'un instinct de conservation. Toutes les méthodes de St. Mill se réduisent à la méthode de variation, qui entraîne la comparaison, et par suite l'adaptation, soit des idées aux faits, soit des idées entre elles (dans tous les ordres de pensée) Bien des découvertes ne sont que la généralisation d'une loi, étendue par habitude ou par économie en dehors de son domaine. Selon Whewell, les deux facteurs essentiels de l'évolution scientifique sont les idées et les faits. On cherche à ramener les faits nouveaux à des faits déjà connus, et on est obligé d'accommoder les anciennes notions aux faits nouveaux. De cette lutte et de ce compromis naît la science. Le progrès scientifique n'est qu'une face de l'évolution organique.

L'économie de la science

Les méthodes de la science obéissent au principe d'économie. La représentation scientifique du monde est celle qui économise le plus les forces intellectuelles. Réponse aux objections de Petzoldt: dans la nature, c'est le principe de stabilité qui règne, parce qu'il n'y a pas de choix; mais au point de vue de la finalité, la considération de l'économie garde sa valeur (Ex: rendement d'une machine thermique.) Réponse à Carus.

La comparaison comme principe scientifique.

L'adaptation se fait par la comparaison des nouveaux faits aux anciens. La comparaison est la condition du langage par lequel l'expérience se conserve et se transmet. Par la comparaison les noms prennent un sens abstrait, deviennent des concepts. L'analyse verbale d'un phénomène au moyen de concepts connus en est la description directe.

La description indirecte consiste à assimiler le phénomène à un autre déjà connu. Telles sont toutes les théories ou idées théoriques. Comme toute analogie implique différence, une théorie est à la fois utile et nuisible, et toujours précaire, car elle ne donne qu'une description partielle et incomplète. (ex: émission, ondulations.) On commence par supposer des esprits ou des forces (reste de fétichisme), puis des matières ou substances (calorique), enfin on se contente de la description directe, la seule fidèle, exacte et complète. Mais il est bien difficile de commencer par la description directe: on compare forcément le nouveau au connu (courants de liquide, de chaleur, électriques, magnétiques.) Il y a des analogies réelles qui fondent une physique comparée, pure phénoménologie sans hypothèses. L'explication scientifique n'est qu'une description

Le langage.

La question de l'origine du langage est mal posée : il s'agit de savoir comment le langage animal a évolué pour devenir le langage humain. Car les animaux ont un langage, comme ils ont une intelligence rudimentaire. Les signes vocaux sont d'abord associés instinctivement à des phén. ou à des actions, puis employés volontairement pour les désigner. Le langage suppose une activité commune, donc une société. Il s'étend ensuite au-delà du domaine pratique et arrive à exprimer les idées abstraites. Utilité du langage pour la pensée : c'est l'algèbre de la pensée, on arrive à manier les mots sans penser à leur signification. Mais le langage n'est pas nécessaire à la pensée intuitive et concrète, qui procède par images. La pensée scientifique, qui a souvent pour but de former de nouveaux concepts, ne peut pas être verbale.

Le concept.

Le concept est une impulsion motrice qui nous porte, soit à éprouver, soit à construire un objet. Les concepts constructifs dominent en Math. les concepts d'épreuve en Physique. Ils supposent des habitudes d'activité acquises par un long exercice. Le concept est une réaction identique à des excitants différents (comparaison avec les animaux). Il ne consiste pas dans l'image vague qui l'accompagne, mais dans un ensemble d'impulsions musculaires précises (ex̂ : opérations arithmétiques). Conciliation du réalisme et du nominalisme : la généralité du concept n'est pas physique, mais physiologique (1). Les réactions qui constituent le concept deviennent inconscientes, mais guident et déterminent notre pensée à notre insu

(1) Les réactions sont moins nombreuses et variées que les stimulants.

Le concept de substance.

Substance = ce qui est absolument permanent dans les phénomènes. Tout corps semble une substance, surtout au toucher (les sensations tactiles variant moins que les autres). Mais comme toutes les qualités sensibles d'un corps varient, on conçoit sa substance comme un noyau supra-sensible. Le consentement universel ne prouve nullement la réalité de la substance. Le concept de substance devient quantitatif; c'est la matière, considérée comme constante: on cherche toujours à rendre la somme de matière constante. La masse n'est pas la quantité de matière (Newton) mais une des propriétés mesurables des corps. Le concept de substance s'affirme dans ses substituts: fluides électriques, âmes (notions fétichistes.) Clausius a cru à tort que le progrès des sciences consistait à réduire tous les fluides à un seul. L'atomisme est une hypothèse substantialiste inutile. On tend de plus en plus à réduire les hypothèses substantialistes aux faits qui en sont le noyau, par ex à la constance de telle ou telle quantité. Il n'y a qu'une chose permanente dans l'univers, ce sont les relations entre les phénomènes, exprimées par des équations.

Causalité et explication.

La causalité mécanique n'est pas plus claire que la causalité psycho-physique (Hume) et pourtant celle-ci a servi de modèle à celle-là parce qu'étant plus fréquente elle semble mieux connue. Aussi le concept de cause a-t-il une origine animiste, fétichiste. L'explication d'un fait n'est rien de plus que sa description: toutes les hypothèses qu'on peut imaginer pour l'expliquer (fluides) ne nous apprennent rien de plus. Quand on assimile un processus

d'un autre plus connu (plus fréquent) on croit l'avoir expliqué ; on n'en a donné qu'une description indirecte. Un phénomène est clair quand on le reconstruit à l'aide d'éléments simples et généraux (1). La connexion causale n'est nécessaire que dans notre esprit : c'est l'expérience seule qui nous apprend si nos prévisions se réalisent. Il n'y a qu'une nécessité logique (subjective) mais pas de nécessité physique (objective).

Correction de vues scientifiques par des circonstances fortuites.

Les faits nouveaux, propres à modifier nos idées et à provoquer une nouvelle adaptation, ne sont naturellement ni prévus ni produits par nous : c'est ce qu'on appelle hasard. La plupart des découvertes scientifiques (Galvani, Malus, Röntgen) et des inventions techniques et pratiques sont dues au hasard. Dans l'art aussi, les combinaisons fortuites inspirent l'artiste. Le résultat dépend aussi de la capacité d'adaptation de l'esprit, très inégale parmi les hommes et les espèces animales. Les inspirations fortuites, les éclairs du génie doivent être préparés par un long et assidu travail destiné à retourner le problème sous toutes ses faces (témoignage de Helmholtz). Note sur le travail inconscient dans le sommeil et le rêve.

Les méthodes de recherche

La première condition de toute découverte est l'intuition, soit des faits, soit des rapports abstraits. Les sens étant des

(1) L'avantage de la Physique sur la Chimie et la Biologie, est d'avoir pour objet des faits homogènes et continus, ne différant qu'en quantité, et permettant des descriptions très générales qui constituent les lois et les théories.

instruments imparfaits, on les remplace par des mesures, et on ne les emploie plus qu'à constater l'égalité ou l'inégalité. Les vérités mathématiques ~~sont intuitives~~ et empiriques. ~~Comment~~ Thalès et Pythagore ont dû trouver leurs théorèmes par de nombreuses expériences & comparaisons. Pas de différence essentielle entre l'induction & la déduction: ce sont les mêmes intuitions, dans un ordre différent (analytique ou synthétique) suivant qu'on découvre ou qu'on démontre. Pas de différence entre le raisonnement et l'expérimentation: le mathématicien fait des expériences sur ses concepts. (Gauss a dit, inversement, que le physicien n'expérimente jamais que sur ses pensées.)

La science est née des besoins de la vie pratique; parenté de la science et de l'industrie: le théoricien cherche la solution idéale d'une difficulté intellectuelle, le technicien, la solution matérielle d'une difficulté pratique. C'est le besoin pratique qui engendre l'abstraction: dans un fait nous ne considérons que ce qui nous intéresse, nous est utile. Il nous pousse à substituer à la réaction R qui n'est pas toujours possible un système de réactions A B C... qui sont plus faciles à réaliser. Quand la correspondance entre deux systèmes de réactions est univoque ils sont équivalents. (Mann) Enfin le besoin pratique conduit à chercher les schèmes les plus simples et les plus généraux; les schèmes arithmétiques sont les plus commodes, car ils ne dépendent que de notre activité ordonnatrice. Ils reposent sur des expériences internes indépendantes des expériences physiques, et dont l'accord avec les phénomènes n'est connu que par expérience. Il ne faut pas

dire que la Arithmétique impose ses lois à la nature.
L'avantage des vérités math. est d'être données dans une seule intuition, de sorte que le contraire est inimaginable (simple et indissoluble).
La Géométrie est une physique de l'espace. ~~Mais comme~~ L'espace sensible n'est pas l'espace géométrique, mais il lui correspond; c'est pourquoi on peut résoudre les problèmes géométriques par l'imagination. Les notions géométriques sont comme les notions physiques des concepts idéaux, et les propositions ne sont vraies qu'approximativement, dans la mesure où la réalité ressemble à cet idéal.
Pas plus d'axiomes en Géométrie qu'en Physique. Pas de nécessité physique, mais une simple nécessité logique (de l'enchaînement des idées) avec la croyance (née de l'habitude) au parallélisme des faits et des calculs.
Les relations quantitatives sont plus simples et plus générales que les qualitatives: elles comportent une précision indéfinie. Quand on peut résumer une table numérique (valeurs corresp. d'une variable et d'une fonction) par une formule de calcul, on a une loi: c'est une image plus ~~simple~~ ~~des phén.~~ abrégée, commode, mais qui ne contient rien de plus que l'énumération des cas particuliers (loi de la réfraction).
— Facultés diverses nécessaires pour la recherche: se trouvent réunies ou séparées chez les grands inventeurs. Exemples.

Le but de la recherche

Une théorie parfaite n'est pas l'assimilation d'un ordre de faits à un autre, mais la description complète et systématique des faits. Les théories dans le premier sens ne sont

que des moyens d'approcher de l'idéal (théorie au 2e sens)
Celle-ci contient plus que toute spéculation, car elle dépouille les faits de toute addition étrangère & superflue de l'imagination.
C'est un inventaire, aussi simple, commode et économique que possible, auquel toutes les explications n'ajoutent rien, au contraire. Le but est atteint quand le catalogue ou tableau des faits se résume en formules à la fois générales et précises (équations de Lagrange, de Fourier) Les lois générales de la nature ~~s'expriment par~~ résident dans ~~l'~~infiniment petit (Riemann) et par suite s'expriment par des équations différentielles (les intégrales ne représentent que les cas particuliers)
Caractère logique et esthétique de l'unité qui en résulte.

Critique de Mach :

Son ouvrage contient tout ce qu'il faut pour réfuter l'évolutionnisme, dont il adopte la logique et la psychologie. Car quel est le nerf de l'évolutionnisme, sinon le principe de la conservation de l'énergie généralisé sans limites et entendu dans le sens substantialiste et fétichiste qu'il condamne ? Son esprit vaut mieux que sa doctrine –

Contre les spiritistes, il a cent fois raison de se moquer de leurs « expériences » et de leur reprocher leur manque d'esprit critique. Mais il est assez mal fondé, au point de vue empiriste, à leur adresser ces reproches : car il n'admet aucun principe rationnel qui puisse limiter le champ de l'expérience possible et permette ~~de dire~~ d'affirmer a priori que tel fait est absurde et impossible.

Il a le tort (comme Bouasse) de prendre les symboles de l'imagination pour des hypothèses métaphysiques. Ce sont les évolutionnistes qui seuls sont dupes de ces symboles et les érigent en hypothèses métaphysiques.
Il parle comme les philosophes du XVIII siècle dont il partage la philosophie nominaliste, empiriste & simpliste ; (l'horreur de l'obscurantisme, du mysticisme c.à.d. de toute métaphysique) Peut-être se justifie-t-elle en Autriche par un état politique et social analogue à celui du XVIII s.
Confiance naïve dans l'histoire de la civilisation, l'ethnographie, les récits des voyageurs &a. Croit à l'Urmensch, à l'homme de la nature.

Opposer à sa conception pratique et utilitaire de la science les conclusions de l'article de Milhaud. Analogie avec la morale : on ne trouve la vérité utile que lorsqu'on ne cherche pas l'utilité.

La conception utilitaire des sensations rappelle Bergson. La théorie épicurienne de la science a été faite par Reinach. Le principe « d'inertie » et de moindre effort de Ferrero. La phénoménologie mathématique rappelle Bouasse (Ostwald d'abord).

Ernst Schröder: Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze, ap. Nova Acta der Kaiserl. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, t. LXXI, n° 6. (Halle, 1898)

Définition de l'infini par Dedekind (1888) et G. Cantor: Un ensemble infini est ~~semblable~~ équivalent à l'une de ses parties intégrantes.

Définition du fini par Ch. Peirce (1885) ap. American Journal of Mathematics, t. VII: Un ensemble est fini, quand dans toute correspondance univoque établie entre ses éléments on revient nécessairement au premier; c.à.d. que, si à tout élément en correspond un autre, inversement tout élément correspond à un autre.

On peut prouver l'identité formelle de ces deux définitions, par l'Algèbre des relations.

La première définition se traduit ainsi:

$$(a \text{ est } \infty) = \sum_z (z;\breve{z} + \breve{z};z \in 1')(z;a < a \in \breve{z};z;a)$$

On sait que: $z;\breve{z} + \breve{z};z \in 1'$

~~est~~ caractérise la correspondance univoque.

L'équivalence de 2 ensembles s'exprime par:

$$(a \underset{z}{\sim} b) = (z;\breve{z} + \breve{z};z \in 1')(b \in z;a)(a \in \breve{z};b)$$

et en général: $(a \sim b) = \sum_z (a \underset{z}{\sim} b)$

Il faut en outre exprimer que $\underline{a}$ est un système ;
Caractéristique du système :

$$(\breve{a} ; 1 \in a) = (a \in a \dagger 0) = (a ; 1 = a) = (a = a \dagger 0)$$
$$= 0 \dagger \breve{a} \dagger a \dagger 0 .$$

Remarque. On peut transformer tout jugement en une relation distinguée (susceptible des valeurs 0 et 1). Par exemple :

$$(\alpha \in \beta) = (1 \in \bar{\alpha} + \beta) = 0 \dagger (\bar{\alpha} + \beta) \dagger 0$$
$$(\alpha \notin \beta) = 1 ; \alpha\bar{\beta} ; 1 .$$

De même :

$$(z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \in 1') = 0 \dagger (\bar{z} \dagger 1') ; 1 ; (1' \dagger \bar{z}) \dagger 0 .$$

La définition se traduit complètement comme suit :

$$(a \text{ est } \infty) = \Sigma_c (c ; 1 = c)(a \sim c < a)$$

On remplace c par $z ; a$, et l'on trouve :

$$(a \text{ est } \infty) = \Sigma_z \Big\{ 1 ; (1' \dagger \bar{z}) . 1 ; (1' \dagger \bar{\breve{z}}) . \breve{a} ; (\bar{z} \dagger \bar{a}) . (\breve{a} \dagger \bar{z} \dagger \bar{a})$$
$$(\breve{a} \dagger \breve{z} ; z ; a) \dagger 0 \Big\}$$

Traduisons la définition de Peirce en symboles.

$$(a \text{ est } \infty) = \Pi_z (P \in Q)$$

L'hypothèse P est que la correspondance $\underline{z}$ est univoque, c. à d. :

$$P = (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \in 1')$$

La conséquence Q signifie que si à tout élément $\underline{k}$ correspond un élément $\underline{h}$, tout élément $\underline{h}$ correspond à un élément $\underline{k}$:

$$Q = \Big\{ \Pi_k \big[(k \in a) \in \Sigma_h (h \in a)(h \in z ; k) \big] \in$$
$$\Pi_h \big[(h \in a) \in \Sigma_k (k \in a)(h \in z ; k) \big] \Big\}$$

Cette expression se simplifie : en coefficients :

$$Q = \left\{ \Pi_k (\bar{a}_k + \Sigma_h a_h z_{hk}) -\!\!< \Pi_h (\bar{a}_h + \Sigma_k a_k z_{hk}) \right\}$$

ou finalement :

$$Q = \left[(a -\!\!< \breve{z} ; a) -\!\!< (a -\!\!< z ; a) \right]$$

Ainsi la définition de Peirce s'exprime par :

$$\Pi_z \left\{ (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z -\!\!< 1) -\!\!< \left[(a -\!\!< \breve{z} ; a) -\!\!< (a -\!\!< z ; a) \right] \right\}$$

ou par la relation distinguée :

$$\Pi_z \left[0 \dagger 0' ; z + 0 \dagger 0' ; \breve{z} + \breve{\bar{a}} \dagger z ; a + \breve{a} ; (\breve{\bar{z}} \dagger \bar{a}) \right] ; 1.$$

tandis que la définition de Dedekind (contraposée) s'exprime par la relation distinguée plus complexe :

$$\Pi_z \left[0 \dagger 0' ; z + 0 \dagger 0' ; \breve{z} + \breve{\bar{a}} \dagger z ; a + \breve{a} ; z ; a + \breve{a} ; (\breve{\bar{z}} \dagger \bar{z} \dagger \bar{a}) \right] ; 1.$$

Les trois premiers termes de la parenthèse sont identiques. On peut prouver que les autres sont équivalents, en les transformant les uns dans les autres.

On ne peut pas dire que l'une de ces définitions soit négative plutôt que l'autre ; ces distinctions n'ont pas de sens en Logique, mais seulement en grammaire. La définition de Peirce est plus simple et plus naturelle. L'autre a été suggérée à M. Schröder par M. Lüroth : les ensembles finis sont ~~ceux~~ tels que si l'on peut les coordonner d'une certaine manière, ils seront toujours coordonnés, ou s'ils laissent un reste, ils laisseront toujours un reste ; les ensembles infinis sont ceux que l'on peut coordonner à eux-mêmes de manière à laisser un reste arbitraire.

§ 2. Théorèmes de Cantor relatifs aux puissances et à l'égalité de puissance (équivalence: $\sim$.)

Définition: $(a \sim b) = \sum_z (z;\breve{z} + \breve{z};z \in 1')(b \in z;a)$
$(a \in \breve{z};b)$

Théorèmes:

(15) $(a \sim b) = (b \sim a)$ relation symétrique

(16) $a \sim a$ — réflexive

(17) $(a \sim b)(b \sim c) \in (a \sim c)$ — transitive

(18) $(a \sim b)(c \sim d) \dots (ac = 0)(bd = 0) \dots \in$
$(a + c + \dots = b + d + \dots)$

(19) $(a \in c \sim b) \in \sum_d (a \sim d \in b)$

(21) $(a \sim d \in b) \in \sum_c (a \in c \sim b)$

(23) $\sum_c (a \in c \sim b) = \sum_d (a \sim d \in b)$

(24) $(a \in b \sim c \in a) \in (b \sim a \sim c)$

(27) $\sum_d (a \sim d < b) + (a \sim b) + \sum_c (b \sim c < a)$

On peut démontrer analytiquement la subsomption directe de (23) ou (19) mais non la subsomption inverse. Celle-ci (ou 21) implique un postulat touchant la nature du domaine 1: il faut qu'il soit assez étendu pour qu'on puisse y trouver les éléments nécessaires à la correspondance indiquée (pour former c.)

On peut appeler la prop. 23 le théorème de la permutation des signes $\in$ et $\sim$ (ou des signes $<$ et $\sim$). On peut supprimer sans inconvénient le signe Σ.

On peut intervertir les 2 signes successifs $\sim$ et $\in$, à la condition de changer la lettre intermédiaire.

Restent à démontrer les théorèmes suivants de Cantor :

théorème C : $(a \in b \in c \sim a) \in (a \sim b \sim c)$

théorème B :

$$(a \in b \sim c \in d \sim a) \in (a \sim b \sim d \sim c \sim a)$$

B se déduit de C au moyen de la permutation de 2 signes $\sim$ et $\in$: 2 signes $\sim$ consécutifs se réduisent alors à un seul (en vertu de 17.)

Réciproquement, C se déduit de B en posant : $d = a$. Il suffira de démontrer B.

Le théorème A de Cantor résulte de notre th. 27, qui porte sur des ensembles qcques, et qui n'implique pas que les 3 alternatives s'excluent (comme pour les nombres cardinaux) En fait, elles ne s'excluent que pour les ensembles finis. Si on les désigne par $\delta, \varepsilon, \gamma$, le th. 27 s'écrit :

$$\delta + \varepsilon + \gamma = 1.$$

Le th. D de Cantor est : $\bar{\gamma}\varepsilon \in \delta$

qui résulte immédiatement du précédent ; et le th. E de Cantor est : $\delta\bar{\varepsilon} \in \bar{\gamma}$

c à d : $\gamma\delta \in \varepsilon$.

En effet, D s'exprime par :

$$\Pi_c \left[(c \in a) \in \overline{b \sim c} \right] \in \Sigma_d (a \sim d < b)$$

et E :

$$\overline{a \sim b}\, \Sigma_d (a \sim d < b) \in \Pi_c \left[(c < a) \in \overline{c \sim b} \right]$$

On vérifie que E équivaut aussi au th. 27. Il suffira de démontrer celui-ci.

§3. Définition de l'égalité et de l'inégalité des puissances (on les représentera par A, B, C, ...) :

$$(A = B) = (a \sim b)$$

$$(A < B) = \bar{\gamma}\delta = \Pi_e(\overline{b \sim c < a})\Sigma_d(a \sim d < b)$$

$$(A > B) = \gamma\bar{\delta}.$$

D'où il suit que: $(A < A) = 0$

car si l'on fait $a = b$, le Π est la contradiction du Σ.

De même, $(A < B)$ exclut $(a \sim b)$, c. à d. $A = B$.

Donc: (40) $(A = B)(A < B) = 0$.

et: $(A = B)(A > B) = 0$.

Enfin: (44) $(A < B)(A > B) = 0$.

Ainsi les 3 relations $<, =, >$ s'excluent mutuellement. — On a, en vertu de 17 :

$$(A = B)(B = C) \in (A = C)$$

Théorème 46 : $(A = B)(B < C) \in (A < C)$

c. à d. $(a \sim b)\Pi_e(\overline{c \sim e < b})\Sigma_d(b \sim d < c) \in$

$$\Pi_e(\overline{c \sim e < a})\Sigma_d(a \sim d < c)$$

De même: $(A < B)(B = C) \in (A < C)$

Théorème 47 : $(A < B)(B < C) \in (A < C)$

c. à d. $\Pi(\overline{b \sim e < a})\Sigma(a \sim d < b).\Pi(\overline{c \sim f < b})\Sigma(b \sim g < c)$

$\in \Pi(\overline{c \sim e < a})\Sigma(a \sim d < c)$

Ainsi la relation $<$ est transitive, comme la relation $=$.

On peut encore démontrer ces 2 théorèmes de Cantor :

(48) $(A < B)(b < c) \in (A < C)$, $(a < b)(B < C) \in (A < C)$

Resterait à établir la proposition fondamentale :

$$(a \in b) \in (A \leq B)$$

qui sert de base à la notion de puissance et qui dispenserait des théorèmes 48 (au moyen de 46 et 47). On en déduirait aussi les th. B et C, et le th. 24 et suiv. Mais on va plutôt démontrer d'abord B et C.

§ 4. On mettra le th. B sous cette forme

$$(a \underset{x}{\sim} b_1 \in b \underset{y}{\sim} a_1 \in a) \in (a \sim b \sim b_1 \sim a_1 \sim a)$$

Il suffit de démontrer l'une des 4 équivalences de la thèse. Le th. est surtout intéressant pour le cas <, où a_1 et b_1 sont des parties intégrantes de a et b.

On projette indéfiniment a_1 sur b (en b_2) et b_1 sur a (en a_2), suivant les principes $\underline{x}$ et $\underline{y}$. On a ainsi :

$$a_n \in \ldots \in a_3 \in a_2 \in a_1 \in a.$$

$$b_n \in \ldots \in b_3 \in b_2 \in b_1 \in b.$$

$$a_{2n} = (y ; x)^n ; a \qquad | \qquad b_{2n} = (x ; y)^n ; b$$

$$a \sim b_1 \sim a_2 \sim b_3 \sim a_4 \ldots \sim a_{2n} \sim b_{2n+1} \sim \ldots$$

$$b \sim a_1 \sim b_2 \sim a_3 \sim b_4 \ldots \sim b_{2n} \sim a_{2n+1} \sim \ldots$$

Il suffit de démontrer l'équivalence de 2 ensembles pris ds les 2 séries (d'un $\underline{a}$ pair avec un $\underline{a}$ impair, ou d'un a et d'un $\underline{b}$ pairs, etc.)

Or les séries des a et des b sont convergentes, car ~~les~~ a_{n+1}, b_{n+1} sont contenus dans a_n, b_n. On a ainsi :

$$a_{2(n+1)} \in a_{2n+1} \in a_{2n}$$

Donc $\lim a_{2n+1} = \lim a_{2n}$, c. à d. $a_{2\infty+1} = a_{2\infty}$

puisque $a_{2\infty+1} \sim a_{2n+1}$, $a_{2\infty} \sim a_{2n}$.
Donc $a_{2n} \sim a_{2n+1}$, ce qui démontre le théorème.
La relation $\underline{z}$ qui établit la correspondance entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est : $z = (\breve{y} ; \breve{x})^{\infty} ; x ; (y ; x)^{\infty} = (\breve{y} ; \breve{x})^{\infty} ; \breve{y} ; (y ; x)^{\infty}$.
Paradoxe : ~~Tout~~ Dans le cas où l'on a $<$ et non $=$, tout a_{n+1} est $< a_n$, quel que soit n ; et pourtant on a :

$$a_{2\infty+1} = a_{2\infty}.$$

Le paradoxe ~~est analogue~~ à celui d'Achille, ou à celui de la tang. trig. de $\frac{\pi}{2}$, ou à celui d'une variable x_n telle que

$$a_n < x_n < b_n$$

et que $\lim a_n = \lim b_n = \lim x_n$.
Du th. B découle immédiatement le th. E : (61) $\gamma\delta \in \varepsilon$:

$$\Sigma(a \sim d < b)\,\Sigma(b \sim c < a) = \Sigma(a \sim d < b \sim c < a) \in (a \sim b)$$

Si deux ensembles sont équivalents chacun à une partie intégrante de l'autre, ils sont équivalents entre eux.
Théorème 62 : $(a \in b) \in (A \leq B)$
ou simplement : $(a < b) \in (A \leq B)$
Or : $(a < b) \in \delta \in \varepsilon + \delta$

$(a < b) = (a < b)\delta$ $\quad (a < b)\gamma\delta \in \varepsilon$

$(a < b)\delta \in \varepsilon + \bar{\gamma}$ $\quad (a < b) \in (\varepsilon + \delta)(\varepsilon + \bar{\gamma}) = \varepsilon + \delta\bar{\gamma}$

La puissance de la partie est inférieure ou égale à la puissance du tout.
Les th. 60 peuvent se traduire par :

(41) $\bar{\gamma}\delta\varepsilon = 0$ $\qquad \varepsilon\gamma\bar{\delta} = 0$

ou : $\delta\varepsilon \in \gamma$ $\qquad \varepsilon\gamma \in \delta$

En combinant 61 et 61, on trouve :

(64) $$\delta\gamma\bar{\varepsilon} + \delta\bar{\gamma}\varepsilon + \bar{\delta}\gamma\varepsilon = 0$$

d'où : (65) $$\bar{\gamma}\delta = \bar{\varepsilon}\delta, \qquad \gamma\bar{\delta} = \gamma\bar{\varepsilon}$$

ce qui fournit une autre définition de l'inégalité ($\bar{\gamma}\delta$ = plus petit ; $\gamma\bar{\delta}$ = plus grand)

Le th. 27 peut maintenant s'écrire

$$1 = \bar{\gamma}\delta + \varepsilon + \gamma\bar{\delta} \left(= \bar{\varepsilon}\delta + \varepsilon + \gamma\bar{\varepsilon} \right)$$

ce qui exprime le théorème A de Cantor :

$$(A < B) + (A = B) + (A > B) = 1.$$

Il suffirait, pour le prouver, de démontrer une des formules : $1 = \delta + \varepsilon + \gamma$, $\quad \bar{\delta}\bar{\gamma}\bar{\varepsilon} = 0$, $\quad \bar{\delta}\bar{\gamma} \in \varepsilon$ (69).

ou encore : $\varepsilon = \gamma\delta + \bar{\gamma}\bar{\delta}$, $\quad \delta = \gamma\varepsilon + \bar{\gamma}\bar{\varepsilon}$, $\quad \gamma = \varepsilon\delta + \bar{\varepsilon}\bar{\delta}$ (70).

§ 5. Définition de l'ordre simple (linéaire) au moyen de l'Algèbre des relations. De deux éléments i, j on dira que i est inférieur à j ($i < j$) si :

$$(i \in x ; j) = x_{ij}$$

x est le principe d'ordination(1) Trois caractères :

1° Si $i < j$, on ne doit pas avoir : $j < i$:

$$\Pi_{ij}\left[(i+j \in a)(i \in x;j) \in (j \,\bar{\in}\, x;i)\right]$$

2° Entre 2 éléments quelconques de a on a : $i < j$ ou $j < i$:

$$\Pi_{ij}\left[(i+j \in a)(i \mp j) \in (i \in x;j) + (j \in x;i)\right]$$

3° La relation x est transitive dans a :

$$\Pi_{ij}\left[(i+h+j \in a)(i \in x;h)(h \in x;j) \in (i \in x;j)\right]$$

(1) Supposé appliqué à un ensemble : $a = a ; 1 = a \neq 0$.

Un 3e caractère, à savoir que l'on n'a jamais iLi :

$$\Pi_i \left[(i \in a) \in (i \notin x;i) \right]$$

dérive analytiqt du 1er.

Les trois caractères peuvent se résumer en une relation distinguée :

$$(a)_x = \breve{\bar{a}} + (\bar{x} + \breve{\bar{x}})(1' + x + \breve{x})\left[x + \bar{x} + (\bar{a} + \bar{x}) \right] + \bar{a}$$

ou en un produit de jugements :

$$(a\breve{a}x\breve{x} = 0)(0'a\breve{a} \in x + \breve{x})(a\breve{a} \cdot x;ax \in x)$$

On peut démontrer, au moyen de ces formules, que si $\underline{x}$ ordonne $\underline{a}$, il ordonne ~~toute partie~~ tout ensemble $\underline{b}$ qui fait partie de $\underline{a}$; que si $\underline{x}$ est un principe d'ordination simple, $\breve{x}$ en est aussi un.

La relation $\underline{x}$ reste indéterminée en dehors de $\underline{a}$. On peut la déterminer en stipulant, par ex. qu'elle soit nulle en dehors de a (qu'elle soit bornée dans $\underline{a}$) :

Condition adventice : $x;\bar{a} = 0$ et/ou $\breve{x};\bar{a} = 0$.

ou $x \in a\breve{a}$.

C à d. que la matrice de $\underline{x}$ est contenue dans la relation quadrillée $a\breve{a}$ (intersection des ensembles a et $\breve{a}$.)

Le principe $\underline{x}$ (dit normal) est alors déterminé d'une manière unique. La condition de transitivité devient simplement : $x;x \in x$. (1)

Les 2 autres deviennent : $(x\breve{x} = 0)(x + \breve{x} = 0'a\breve{a}) =$
$(\breve{x} = 0'a\breve{a}\bar{x}) = (x = 0'a\breve{a}\breve{\bar{x}})$ Donc

$$a_x\ (\underline{\text{normal}}) = (x;x \in x = 0'a\breve{a}\breve{\bar{x}})$$

(1) Condition de transitivité absolue

Tout principe d'ordination x donne naissance à un principe normal $a\breve{a}x$: $(a)_x = a_{a\breve{a}x}$
& celui-ci est déterminé d'une manière unique.
Inversement, soit y un principe normal d'ordination de l'ensemble $\underline{a}$; le principe le plus général a pour forme : $x = y + u(\bar{a} + \breve{\bar{a}})$
u étant une relation arbitraire. $[\bar{a} + \breve{\bar{a}} = \overline{(a\breve{a})}]$
Tout principe d'ordination de l'ensemble 1 est un principe normal.
Cas particuliers : $a = 0$: $(a)_x$ est vérifiée par toute relation, a_x par aucune, sauf $x = 0$.
$\underline{a}$ a un élément, $\underline{i}$: $(a)_x$ est vérifiée par tout : $x = u(\bar{a} + \breve{\bar{a}})$, a_x par aucune ~~relation~~, sauf $x = 0$.
$\underline{a}$ a deux éléments, $\underline{i}$ et $\underline{j}$. Les seuls principes normaux d'ordination sont : $y = i\breve{j}$, $\breve{y} = \breve{i}j$.
Théorème : Tout ensemble peut être ordonné simplement. Il suffit de le démontrer pour l'ensemble 1. C'est un th. de la théorie des relations binaires, à savoir que la double affirmation : $1_x = (x ; x \in x = 0'\breve{x})$
a au moins une racine $\underline{x}$.
On sait remplir séparément les deux conditions : il existe des relations transitives $(x ; x \in x)$ et des relations entièrement impaires : $(x = 0'\breve{x}) = (x + \breve{x} = 0') = (x\breve{x} = 0)$
c.à.d. qui ont les cases de la diagonale vides, et qui, sur chaque couple symétrique de cases, en ont une vide

Mais y a-t-il toujours des relations transitives impaires ? dans tout domaine de pensée donné ? Cela est manifeste pour les ensembles finis, infinis dénombrables et même continus. Il suffit d'imaginer toutes les cases supérieures à la diagonale pleines et toutes les autres vides. Mais ce n'est pas démontré d'une manière générale. Peut-être pourrait-on concevoir un domaine qui ne se laisse ordonner simplement d'aucune manière.

On peut formuler logiquement d'autres conditions :
Il y a dans $\underline{a}$ (ordonné par $\underline{x}$) un premier élément :

$$k^a_x = \Sigma_h (h \in a)\, \Pi_k \left[(k \in a)(k + h) \in (h \in x ; k) \right]$$

Il y a dans $\underline{a}$ (ordonné par $\underline{x}$) un dernier élément :

$$g^a_x = \Sigma_h (h \in a)\, \Pi_k \left[(k \in a)(k + h) \in (k \in x ; h) \right]$$

ce qui équivaut à remplacer x par $\breve{x}$ dans k^a_x.

Formule du 1er élément : $N = a\left[(1' + x) + \bar{a} \right]$

— du dernier : $H = a\left[(1' + \breve{x}) + \bar{a} \right]$

Sous l'hypothèse a_x, les formules se simplifient :

$$k^a_x = (a \in \breve{x} ; 1) \quad , \quad g^a_x = (a \in x ; 1)$$

$$N = a(\breve{x} + 0) \quad , \quad H = a(\bar{x} + 0)$$

Définition de la similitude de deux ensembles ordonnés ($\underline{a}$ par $\underline{x}$, $\underline{b}$ par $\underline{y}$), ~~au moyen de la coordination : $z = x + y + ab$~~ au moyen de la coordination $\underline{z}$:

$$(z \in \breve{a}b)(z ; x ; \breve{z} \in y)$$

La dernière proposition affirme que z est une coordination semblable ; elle résume les prop suivantes :

$$S = \Pi_{ijhk} \left[(i+j \in a)(h+k \in b)(h \in z;i)(k \in z;j)(i \in x;j) \in (h \in y;k) \right]$$

D'après l'intuition, une coordination semblable est réciproque c.à.d qu'on doit avoir :

$$S = (z;x;\breve{z} \in y)(\breve{z};y;z \in x)$$

ce qui n'est pas facile à démontrer logiquement.
En somme, l'Algèbre des relations a fait ses preuves en démontrant toutes les propositions de Cantor, fondamentales dans la théorie des ensembles. Elle relie la Mathématique à la Logique. Elle est un instrument de recherche mathématique.

Sur l'idée d'ordre, cf Burali-Forti, ap. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. 8, 1894. Cf Vivanti et Vailati ap. Rivista, 1892 et 1894.

Schröder: die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3, und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung. ap. Nova acta .... t. LXXI, n°7.
Soit un ensemble $a = a \neq 0 = a;1$. Il s'agit d'exprimer à quelle condition il aura telle puissance (n. cardinal)
$(\text{Num}\, a = 0) = (a = 0) = 0 \neq \bar{a} = \breve{a} \neq \bar{a}$.
Remarque: La nullité d'une relation quelconque se traduit par : $0 \neq \bar{a} \neq 0$. Mais comme on sait ici que a est un ensemble $(a \neq 0)$ cela simplifie la condition

$(\text{Num}.a = 1) = (0'; a = \bar{a}) = (1' \mp \bar{a} = a)$

toujours sous la même condition. On peut obtenir cette formule en partant de la prop suivante :

$$\Sigma_i (i \in a) \Pi_j [(j \mp i) \in (j \mathrel{\not\in} a)]$$

De même on obtient la formule :

$(\text{Num}.a = 2) = (0'a\breve{a} \mathrel{\not\in} 0'; a0')$

en partant de la prop. suivante :

$\Sigma_{ij} (i \mp j)(i + j \in a) \Pi_h [(h \mp i)(h \mp j) \in (h \mathrel{\not\in} a)]$

Si l'on pose : $0'a\breve{a} = c$, la condition se réduit à :

$$c \mathrel{\not\in} c; c$$

et cette relation caractérise les ensembles de 2 éléments.

On peut formuler ainsi la relation récurrente :

« L'ensemble a contient un seul élément de plus que l'ensemble b » :

$\sum_z (z; \breve{z} + \breve{z}; z \in 1')(b \in z; a)[z \mp (\bar{a} + \breve{z}; b) \mp 0]$

en partant de : $\Sigma_i (i \mathrel{\not\in} b)(a \sim b + i)$

« L'ensemble a contient au moins 1 élément »

$$(a \mp 0) = 1; a = \breve{a}; a$$

« L'ensemble a contient au moins 2 éléments : »

$(0'a\breve{a} \mp 0) = (0'; a = 1) = 0 \mp 0'; a = \breve{a}; 0'; a$.

« L'ensemble a contient au moins 3 éléments : »

$(0'a\breve{a}.0'; a0' \mp 0) = \breve{a}; 0'(0'; a0'); a$.

cette dernière formule se déduit de la proposition :

$\Sigma_{ijh} (i \mp j)(i \mp h)(j \mp h)(i + j + h \in a)$

Les formules qui expriment que l'ensemble a contient
au plus 1, 2, ... éléments sont la négation de celles
qui expriment qu'il ~~[illegible]~~ en contient ~~[illegible]~~ au moins 2, 3, ...
On peut ~~combiner~~ ensemble ces prop. limitatives
par ex. définir l'ensemble de nombre 1 comme celui
qui contient au moins et au plus 1 élément.
Ou bien : un ensemble qui contient au plus 1 élément
est un ensemble qui en contient 0 ou 1.

On obtient la condition de l'égalité de nombre
de 2 ensembles dans un domaine de 6 éléments au plus en affirmant
que a et b contiennent simultanément au moins
1, 2, ou 3 éléments, ~~ou bien~~ et que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ contiennent
simultanément au moins 1, 2, ou 3 éléments.
(c à d que a et b en contiennent au plus 3, 4 ou 5.)
Ou bien encore en combinant les conditions de
l'égalité de nombre de a et b pour 1, 2, 3, et celles
de l'égalité de nombre de $\bar{a}$ et $\bar{b}$ pour 1, 2, 3.

En général, la condition explicite de l'égalité de nombre
de 2 ensembles finis ~~se compose~~ dans un domaine de 2n éléments
se compose des conditions d'égalité de a et b pour 1 ... n
et des conditions d'égalité de $\bar{a}$ et $\bar{b}$ pour 1 .... n :

$$c_1 c_2 c_3 \ldots c_n \times \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n$$

γ_k étant c_k où l'on a remplacé a par $\bar{a}$ (et contraposé)
Les conditions c sont les résultantes partielles (c à d les

conséquences nécessaires) de $(a \sim b) = (\text{Num } a = \text{Num } b)$

Pour un domaine infini, la condition devient:

$$c_1 c_2 c_3 \ldots \text{ à l'infini,}$$

et les conditions complémentaires y disparaissent.

Si l'on formule c_n sous la forme: $f_n(a) = f_n(b)$, la condition générale pourra s'écrire:

$$f_1(a) f_1(b) + f_2(a) f_2(b) + \ldots + f_n(a) f_n(b) + \ldots$$

où $f_n(a)$ affirme que: $(\text{Num. } a = n)$

« L'ensemble a contient 3 éléments » s'exprime par:

$$\left[\Sigma_i\, \breve{i} \,;\, 0'a \left\{0' \,;\, 0'a\left[1' \dagger (1' + \bar{a} + i)\right]\right\}\right] ; a$$

qu'on déduit de:

$$\Sigma_{ijh}\, (i \neq j)(j \neq h)(h \neq i)(i + j + h \in a)\, \Pi_k \left[(k \neq i)(k \neq j)(k \neq h) \in (k \notin a\right.$$

On ne peut pas effectuer cette sommation et obtenir la ~~fo~~condition sous forme fermée (explicite.)

Ainsi l'idée de nombre est loin d'être simple (<u>Dedekind</u>). Comment expliquer la simplicité de la définition de <u>Cantor</u> (Abstraction de la <u>nature</u> et de l'<u>ordre</u> des éléments.) C'est qu'elle est faite au p. de vue de la compréhension; d'ailleurs l'idée de ordre est déjà compliquée; comment l'idée de nombre pourrait-elle être simple? — Les nombres sont considérés comme données simples en Arithmétique, mais il s'agit de trouver les fondements logiques de l'Arithmétique dans l'Algèbre des relations, qui enveloppe la Logique ordinaire, et qui est une <u>Logique de l'extension.</u>

Whitehead: The Geodesic Geometry of Surfaces in non-Euclidean Space, ap. Proceedings of the London Mathematical Society, t. XXIX. (10 mars 1898.)

Deux formes d'espace elliptique: simple et double, ou polaire et antipodal, ~~ou sphérique et elliptique~~

Dans le 1er, 2 dr. ne se rencontrent qu'en un point; dans le 2e (dit sphérique), en deux.

Beltrami a prouvé que la géométrie géodésique des surf. à courb. const. de l'espace euclidien est la même que la géom. rectiligne dans les plans de l'espace elliptique ou hyperbolique, suivant que la courb. de la surf. est positive ou négative.

Propositions dues à Jean Bolyai:

I. La géom. des grands cercles d'une sphère de ray. ρ dans un espace elliptique dont la const. est γ, est identique à la géom. rectiligne des plans d'un espace elliptique dont la const. est $\gamma \sin \frac{\rho}{\gamma}$.

II. La géom. des grands cercles d'une sph. de rayon ρ dans un esp. hyperbolique de constante γ, est identique à la géom. rectiligne des plans d'un espace elliptique dont la const. est $\gamma \,\mathrm{sh}\, \frac{\rho}{\gamma}$.

III. La géom. des géodésiques (lignes d'égale distance) sur une surf. d'égale distance δ d'un plan dans un esp. hyperbolique de const. γ, est identique à la géom. rectiligne des plans d'un esp. hyperbolique dont la

constante est $\gamma \operatorname{ch} \frac{\sigma}{\gamma}$. ligne limites)

IV. La géom. des géodésiques (horicycles) sur une surface limite (horisphère)(1) dans l'esp. hyperbolique est identique à la géom. rectiligne des plans de l'espace euclidien

— En appelant γ rayon de courb. de l'espace on a commis un contre sens ~~qui en~~ en croyant que l'espace euclidien (dit plan) jouit d'une propriété spéciale, à savoir que les plans des autres espaces peuvent être représentés par des surfaces en lui. Bolyaï a en effet démontré qu'un plan euclidien peut être représenté par une surface dans l'espace hyperbolique.

— Addition, mai 1898: La comparaison des longueurs des constantes de différents espaces est un non-sens: Aucune comparaison n'est possible entre des lignes de différents espaces. La longueur γ de la const. spatiale ne peut être mesurée que par rapport à la longueur d'une droite du même espace prise pour unité arbitraire.

Mais on peut comparer les constantes spatiales quand on discute la géom. géodésique de surf. d'un espace à 3 dim. Or toute géom. non-euclidienne peut être interprétée comme une géom. géodésique (dans un espace à 4 dim.) Mais cette interprétation n'est pas nécessaire, attendu que la géom. euclidienne peut aussi être interprétée dans un espace non-euclidien

— La comparaison de la constante spatiale γ à

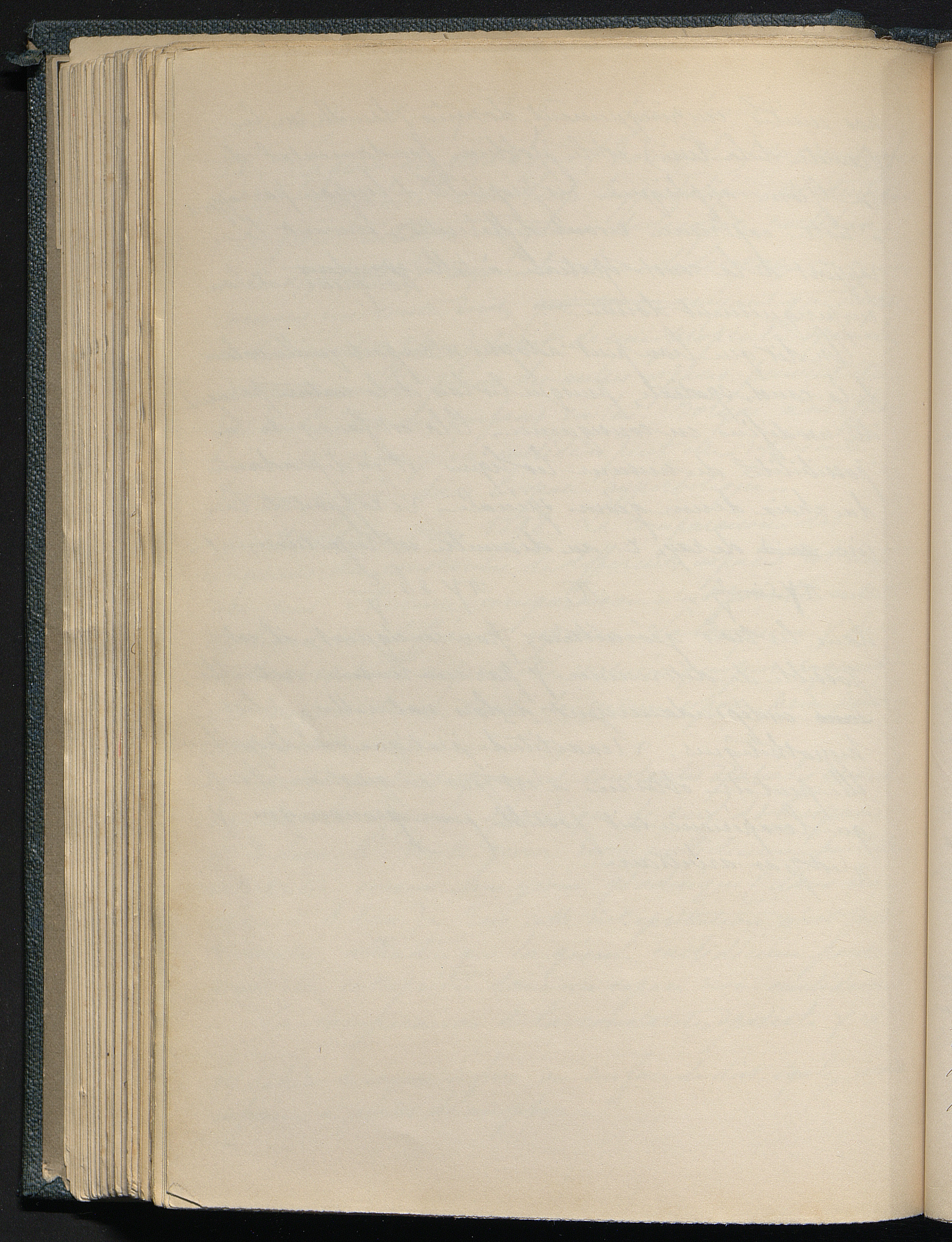
(1) Sphère de rayon infini, ou surface de dist. égale mais infinie, à partir d'un plan

nos unités empiriquement données (l'unité ou le diamètre de la terre) est le problème fondamental de la Géom. appliquée. Les propriétés de l'espace par rapport à notre expérience seront différentes suivant le rapport de la const. spatiale à telle ~~grandeur~~ longueur-étalon empiriquement donnée.

On dit que l'on peut adopter n'importe quelle valeur de la const. spatiale, puisque les lois de la nature peuvent être modifiées en conséquence. Cela est faux, si la possibilité de mesurer les lignes est indépendante du choix d'une géom. spéciale. Le rapport de la circ. ~~[illegible]~~ de ray. r au diamètre est respectivement:

$$\pi\gamma \sin\frac{r}{\gamma}, \qquad \pi, \qquad \pi\gamma\, \mathrm{sh}\frac{r}{\gamma}$$

dans les trois géométries; par conséquent, il est possible de déterminer γ par une mesure actuelle, ~~sans~~ indépendamment des lois naturelles, plus hypothétiques. L'exactitude pratique avec laquelle elle peut être obtenue n'est pas en question; il suffit que l'expérience soit possible pour prouver que γ n'est pas arbitraire.



A. N. Whitehead : A Treatise ~~of~~ on Universal Algebra, with applications. Vol. I (Cambridge, 1898.)

Étude des divers systèmes de raisonnement symbolique (Quaternions, Grassmann, Boole) ou des différentes Algèbres possibles, applicables à divers espaces : l'idée d'espace généralisé sert à leur interprétation.

La Logique symbolique est une espèce d'Algèbre qui rentre dans les Mathématiques.

La Mathématique est le développement de tous les types de raisonnement formel, nécessaire & déductif. Les définitions ~~mathématiques~~ ont un sens conventionnel, en Math. pures, et existentiel, en Math. appliquées. Les 1es sont invérifiables (soumises au seul principe de contradiction); les secondes doivent être établies comme vraies.

Pour qu'une Math. pure puisse être appliquée, il faut que les propriétés attribuées aux êtres de raison qu'elle traite soient analogues aux propriétés des objets réels.

Les Math. se sont longtemps confinées dans l'étude du Nombre, de la Grandeur et de l'~~Analyse~~ Espace.

Introduction des quantités complexes, fondée sur des définitions conventionnelles ; on leur a étendu indûment le nom de quantité.

Il y a des Algèbres qui n'ont pas pour objet le Nombre ni la Grandeur. Ce sont des sciences mathématiques, ~~qui~~ c.à.d. des calculs qui facilitent le raisonnement dans tel ~~outil~~ domaine de la pensée ou de l'expérience.

On exposera les nouvelles Algèbres comme des ~~usages~~ instruments de déduction, et comme des symbolismes représentatifs de concepts fondamentaux. Si elles ont été négligées jusqu'ici, c'est qu'on n'a pas aperçu leur unité d'idée, et ~~parce~~ qu'on ne les a pas conçues indépendamment les unes des autres, comme sciences distinctes quoique pouvant s'appliquer au même objet (de même que la Géométrie analytique, la G. synthétique et la G. projective s'appliquent toutes à l'Espace.)

I. Principes généraux. II. Algèbre de la Logique symbolique. III. Théorie de la Multiplicité de positions (généralisation de l'espace) IV. Calcul de l'extension (Grassmann) appliqué : V. à la théorie des forces dans un ensemble à 3 dimensions ; VI. à la Géom. non euclidienne ; VII. à la G. euclidienne.

A Schèmes substitutifs. Un schème est un ensemble d'objets ayant en commun une propriété générale : a, b, c. Sont équivalents ceux qui possèdent cette propriété sous le même mode : a = a', b = b', ...

Deux objets équivalents, m et m', peuvent dériver d'objets équivalents : a, b, c, ... ; a', b', c', ... par des opérations différentes. Les modes par lesquels les opérations peuvent différer sans cesser de donner des résultats équivalents sont les caractéristiques du schème.

Si deux schèmes ont les mêmes caractéristiques, on peut les substituer l'un à l'autre et opérer sur l'un au lieu d'opérer sur l'autre : Si $a = a'$ on aura : $\alpha = \alpha'$; et m dérivera de a, b, ... de la même manière que μ dérive de $\alpha, \beta, \ldots$ B

Livre I : Principes du symbolisme algébrique

Ch. I : De la nature d'un calcul

Trois espèces de signes : suggestifs, expressifs (mots) substitutifs (mathématiques.)

Un calcul est l'art de manipuler ou de combiner des signes substitutifs suivant certaines règles telles, que le résultat des opérations, une fois interprété, exprime une proposition vraie concernant les objets signifiés.

~~On peut développer~~ Une fois les règles posées, on peut développer tout le calcul sans faire attention au sens des signes. – On peut aussi poser des règles arbitraires et manipuler des marques dépourvues de sens ; mais c'est là un jeu frivole, qui ne devient un vrai calcul et n'a de valeur scientifique que lorsqu'on conçoit ces marques comme des signes substitutifs, susceptibles d'une interprétation inconnue.

Les propositions, dans un calcul, revêtent la forme générale de l'équivalence. Deux objets équivalents peuvent ~~être~~ se remplacer l'un l'autre dans leurs relations. Les signes qui les représentent sont dits équivalents, et peuvent se substituer l'un à l'autre, dans certaines limites (domaine d'équivalence)

Équivalence n'est pas identité : l'équivalence n'est intéressante et instructive que si elle implique diversité. Il ne faut pas définir 2 signes équivalents comme des signes représentant un même objet, mais plutôt 2 objets sont équivalents lorsqu'ils rentrent sous un même concept, lorsqu'ils sont identiques ou semblables à un certain point de vue. Ne pas confondre la copule

= avec la copule logique *est*: si b = b', c'est que b est B, et b' est B aussi.
Toute équivalence renferme un *truisme* (identité partielle) et un *paradoxe* (identité de choses différentes). Les lois du calcul et le critérium d'équivalence reposent sur le truisme, les conséquences au contraire développent le paradoxe. Une fois les conditions de l'équivalence *réelle* traduites en formules, le critérium d'équivalence devient tout superficiel et formel; on oublie l'identité pour ne remarquer que les différences.
Les jugements d'équivalence sont directs ou indirects. Dans ce 2e cas, les 2 objets équivalents sont dérivés tous deux d'objets directement (intuitivement) équivalents. Cette dérivation s'appelle opération combinaison synthèse. Elle s'effectue, soit par un événement phénoménal, soit par une action de l'esprit. Un objet *a* est le résultat d'une opération effectuée sur *b*, *c*, *d*, s'il se présente à l'esprit quand les objets *b*, *c*, *d* sont présentés de une certaine manière. A

B Le schème substitué à l'autre est un ensemble de signes substitutifs. On opère sur ces signes, et l'on interprète les résultats à la fin du calcul. Exemple : les grandeurs de diverses espèces.

Schèmes conventionnels. Inversement un système de signes substitutifs est un schème conventionnel, créé et doué de propriétés arbitraires tout exprès pour pouvoir être substitué à un schème de objets. Les caractéristiques du schème sont les lois conventionnelles qui établissent l'équivalence de diverses combinaisons. Au lieu de raisonner sur les propriétés réelles des objets, on raisonnera sur les propriétés conventionnelles des signes (concrets), et comme ceux-ci sont susceptibles de manipulation physique et sensible (sur le papier), le raisonnement est remplacé par le calcul (combinaison ou construction intuitive) (combinaison ou construction idéale).

Formes ininterprétables. Difficulté, quand un calcul n'est que partiellement interprétable. Ex. le calcul des imaginaires, donne des résultats interprétables numériquement, quand il ne s'agit que de nombres réels. Comment un raisonnement algébrique qui n'a pas de sens arithmétique peut-il donner des résultats valables en Arithmétique ? C'est que la valeur des lois de l'Algèbre ne dépend pas de l'Arithmétique ; seulement les lois algébriques sont identiques aux lois arithmétiques, et c'est pourquoi, toutes les fois qu'un théorème d'Algèbre est interprétable, il donne un théorème d'Arithmétique vrai. — L'Algèbre ne dépend pas non plus de la Géométrie. La valeur d'un calcul ne dépend pas de son interprétabilité.

Néanmoins, l'interprétation géométrique des imaginaires a aidé l'Algèbre; ce sont deux schèmes qui se prêtent un mutuel secours, qui sont substitutifs l'un de l'autre.

Ch. II : Multiplicités.

A tous les objets d'un schème qui possèdent le même mode de la propriété fondamentale, on fait correspondre un élément de la multiplicité. La multiplicité est donc l'ensemble des modes abstraits de la propriété déterminante du schème. Des objets équivalents correspondent à un seul et même élément. Aux relations entre les objets correspondent des relations entre les éléments; les caractéristiques du schème deviennent les caractéristiques de la multiplicité, dont on peut déduire toutes les relations entre les éléments (ex: axiomes géométriques) Cette déduction est l'œuvre du calcul.

— La définition des caractéristiques peut ~~[illegible]~~ impliquer des propriétés secondaires des objets, et par suite des éléments correspondants. On considère par suite chaque élément comme susceptible de modes spéciaux. La seule propriété secondaire dont il sera question est l'intensité (ex: notes de musique).

Si l'on distingue dans une multiplicité A l'ensemble des éléments qui possèdent un certain caractère, cet ensemble est une sous-multiplicité C. Si ce caractère appartient à des éléments d'une autre multiplicité B la sous-multiplicité sera contenue dans cette autre, elle sera commune à A et B; celles-ci seront dites s'intersecter dites suivant C. Cela implique que A, B, C ont entre elles une connexion, et font partie d'une même multiplicité qui les comprend toutes. (sujet)

Définitions de diverses multiplicités spéciales: uniformes, sériées simples ou complexes, quantitatives, continues, à n dimensions.

Ch. III: Principes de la Algèbre universelle

Définitions générales de l'addition et multiplication. Les définitions spéciales engendrent les Algèbres spéciales.

Dans tout système algébrique il n'y a qu'un seul type d'équivalence reconnu; c.à.d. que la définition de l'équivalence vaut pour toute addition ou multiplication. Ex: le Calcul différentiel fait exception (on ne peut pas substituer partout des quantités égales)

Principes de l'addition. On suppose que dans un ~~ensemble~~ groupe d'objets a, b, ... z, on puisse combiner 2 quelconques en une synthèse dont le résultat est un 3e objet de ce même groupe (possédant les mêmes propriétés); que ce résultat est univoque, c.à.d. que tous les résultats possibles de cette synthèse sont équivalents; que cette synthèse comporte un ordre déterminé: $a \frown b$, $b \frown a$ sont en général différents.

$$(a \frown b) \frown p = a \frown b \frown p.$$

Loi commutative: $a \frown b = b \frown a$

Suppose que l'ordre de l'opération $\frown$ n'est pas indifférent

Loi associative: $a \frown b \frown c = a \frown (b \frown c)$

Une telle synthèse s'appellera addition (+) Une telle multiplicité sera dite algébrique. Un ensemble d'objets correspondant constituera un schème algébrique.

Principes de la soustraction. Problème : $x+b=a$
Peut n'avoir pas de solution, en avoir une, ou plusieurs.
Supposons qu'il y ait une solution (c.à.d. un élément de la multiplicité) : $a \cup b$; par définition :

$$a \cup b + b = a$$

$$a \cup b \cup c + (b+c) = a \cup b + b = a$$

(en supposant qu'il y ait une solution : $(a \cup b) \cup c$.)
Supposons qu'il y ait une solution : $a \cup (b+c)$:
on trouve : $a \cup (b+c) = a \cup b \cup c$.
Les deux solutions sont équivalentes. Par suite :

$$a \cup b \cup c = a \cup c \cup b.$$

Si $a \cup b$, $b \cup c$ existent, $a \cup (b \cup c)$ existe aussi.
On trouve : $a \cup b + c = a \cup (b \cup c)$

$$(a \cup b) \cup c = (a \cup c) \cup b = a \cup (b+c) = a \cup (c+b)$$

Si l'on admet que la solution $(a \cup b)$, quand elle existe, est unique (~~c.à.d. qu~~ univoque), l'opération s'appelle alors soustraction ($-$). On a alors : $a+b-b=a$
Donc : $a-b+b=a+b-b$.
Ce qui permet de donner toujours un sens au 1er membre, car si $(a-b)$ n'existe pas, $a+b-b=a$ existe toujours.
On démontre alors : $a+b-c=a+(b-c)$

$$a-b+c=a+c-b.$$

Élément nul. Si $(a-b)$ a toujours un sens, on a :

$$c+a-a=c+b-b=c$$

donc : $a-a=b-b=0$.
Définition de zéro : $a+0=a$.
d'où : $a-0=a-(b-b)=a-b+b=a$
Propriétés de $(0-a)$: $b+(0-a)=b-a$

$$b-(0-a)=b+a$$

On est amené à écrire : $(0-a)$ sous la forme $-a$,
et : $a = 0+a$ ——————————— $+a$
Ce sont des pas (steps) opposés, par rapport à 0. En général, $(b-a)$ est le pas de a à b. Les 2 pas opposés $+a$ et $-a$ se neutralisent. Règle des signes. Les pas obéissent aux lois commutative et associative.

Multiplication. C'est une autre combinaison de 2 termes qui n'appartiennent pas nécessairement au même groupe, qui est univoque, mais non nécessairement commutative ni associative.

Soient 2 ~~ensembles~~ multiplicités algébriques A, B ; la synthèse d'un terme a de la 1re et d'un terme b de la 2e (pris avec leur ordre) a pour résultat un nouvel objet c d'une 3e multiplicité C, qu'on suppose algébrique. Par suite, $ab'' + b''a'$, $(a+a'+a''\ldots)(b+b'+b''+\ldots)$ sont des éléments de C.

La multiplication vérifie, par définition, la loi distributive par rapport aux 2 multiplicités :

$$a(b+b') = ab + ab' \qquad (b+b')a = ba + b'a$$
$$b(a+a') = ba + ba' \qquad (a+a')b = ab + a'b.$$

— Si une multiplicité A est sui-multiplicative (du 1er ordre) l'ensemble des produits de ses termes 2 à 2 est une multiplicité B du 2e ordre.
Si l'on peut multiplier entre eux les termes de A et B, leurs produits forment une multiplicité C du 3e ordre.
Loi associative : Supposons un ensemble de multiplicités sui-multiplicatives et admettant la multiplication 2 à 2. Les produits d'une multiplicité du m^e ordre avec une

multiplicité du n^e ordre forment une multiplicité du $(m+n)^e$ ordre. Un tel ensemble s'appellera un système algébrique complet.

Si la multiplicité du m^e ordre est identique à la multiplicité du 1er, on aura une algèbre de $(m-1)^e$ espèce. Une algèbre de 1e espèce ne contient qu'une multiplicité: on l'appellera linéaire.

Emploi des points au lieu de parenthèses (Johnson)

— Soit 0_1 le zéro de A, 0_2 celui de B, 0_3 celui de C. On trouve aisément que: $a0_2 = b0_1 = 0_3$. On peut identifier les 3 zéros, et poser: $a0 = b0 = 0$. Pour les multiplicités où l'on a: $a + a = a$, et par suite pas de soustraction, on définira le zéro comme l'élément qui vérifie l'équation:

$$a + 0 = a$$

quelque soit a.

Classification des algèbres spéciales. Il est bon d'étudier chaque algèbre avec son interprétation, la plus simple et la plus générale. L'Algèbre ordinaire trouve son interprétation dans la théorie des grandeurs.

1e distinction, fondée sur les 2 genres de addition:

Algèbre non-numérique où: $a = a + a$.

Pas de nombre ni de grandeur. C'est l'Alg. de la Logique. L'interprétation la plus simple est celle qui s'applique aux régions de l'espace (sécantes ou non).

Algèbre numérique où: $a + a = 2a$.

Coefficients numériques (en lettres grecques). Interprétation: multiplicités de positions (c à d. espace projectif.) où l'addition a les propriétés de l'addition numérique.

Les algèbres numériques se classent d'après la multiplication: algèbres linéaires, et algèbres comprenant plusieurs multiplicités. On ne peut réduire toutes les algèbres à la forme linéaire que par artifice. Le Calcul de l'extension fournit des Algèbres de toute espèce. L'Algèbre du 1er ordre trouve son interprétation dans les multiplicités extensives, c.à.d. dans des espaces de diverses formes. Ainsi c'est l'espace (généralisé) qui fournit une interprétation à toutes les Algèbres spéciales; de sorte que l'Algèbre universelle est une Géométrie générale.

Livre II. L'Algèbre de la Logique symbolique

L'Univers i est défini par: $ai = a$

Eléments supplémentaires (négation)

Réciprocité des deux opérations.

Interprétation: application aux régions de l'espace. Régions incidentes; le calcul des subsomptions est analogue à celui des inégalités. $(y < x) = (y = xy)$

$(z < xu + yv) < (z < x + y)$

$[(x+u)(y+v) < z] < (xy < z)$.

$(xy = xz) < (xy' = xz')$

Ch. II. Développement. Elimination.

Si: $c = ax + bx'$, $ab < c < a + b$.

Forme normale: $ax + bx' = cx + dx'$.

Equivaut aux 2. $ax = cx$, $bx' = dx'$.

Doubles discriminants sont: $A = ac + a'c'$
$B = bd + b'd'$

Résultante de l'équation:

$$A'B' = 0.$$

L'éq. se ramène à: $A'x + B'x' = 0.$

Si l'on a n équations semblables, et si l'on fait:

$$\overline{A}' = \Sigma_i A'_i \qquad \overline{B}' = \Sigma_i B'_i$$

$A'B' = \Sigma A'_i B'_k$ Résultante: $A'B' = 0.$

Equation unique: $A'x + B'x' = 0$

— Equation à 2 inconnues (et à 2 membres). Si ses 4 discriminants sont A, B, C, D, elle équivaut à:

$$A'xy + B'xy' + C'x'y + D'x'y' = 0.$$

Résultante: $A'B'C'D' = 0.$

Extension à un nombre qcq. de inconnues.

C'est la résultante complète, car il suffit qu'elle soit vérifiée pour que l'équation soit résoluble.

— Equations limitantes et non limitantes (par rapport à une, plusieurs ou toutes les inconnues)

Pour qu'une éq. soit non-limitante pour un ensemble de inconnues, il f. et il s. que la résultante de ~~l'au~~ élimination (des autres inconnues) se réduise à une identité.

Toute éq. peut être rendue non-limitante par rapport à plusieurs inconnues, en leur substituant leurs solutions gén. en fonctions de indéterminées.

Champ d'une expression — Fonction limitée, illimitée.

$abc\ldots k < \varphi(x, y, z, \ldots t) < a+b+c+\ldots+k$

Le champ de la fonction $\varphi(x, y, z, \ldots t)$ est égal à celui de: $p = abc\ldots k + u(a+b+c+\ldots+k)$

Trouver le champ de la fonction $f(x, y, z\ldots)$ quand les inconnues sont conditionnées par un système d'équations. On pose: $p = f(x, y, z\ldots)$

Soit A la somme des coefficients corresp. à a,
B ——————————— b',
etc. dans les équations de condition ($a, b, \ldots$ étant les coeff. de f développée.) On trouve:

$(a+A)(b+B)\ldots < p < aA' + bB' + \ldots$

<u>Résolution d'une équation à plusieurs inconnues</u>, par l'élimination progressive des inconnues.

L'équation devient non-limitante par rapport à celles des inconnues auxquelles on a substitué leurs expressions en fonction d'indéterminées.

<u>Solution symétrique de l'équation à 2 inconnues.</u>

<u>Méthode de Johnson</u> pour la résolution symétrique des équations limitantes ou non.

<u>Lemme</u>: Pour diviser $(a+b)$ en 2 parties disjointes x et y telles que: $x < a$, $y < b$, on doit prendre: $x = a(b'+u)$, $y = b(a'+u')$.

On considère la résultante sous la forme:

$A + B + C + D + \ldots = 1$

$A, B, C, \ldots$ étant les discriminants.

Puis on divise les constituants en 2 groupes disjoints dont chacun doit être contenu dans la somme d'une moitié des discriminants. On subdivise ensuite et l'on obtient l'expression générale de chaque constituant ; d'où l'on conclut par addition celle de chaque inconnue. – Pour 2 inconnues on trouve :

$$x = a'(c+u)(d+p) + b'(d+u')(c+q)$$
$$y = a'(b+u)(d+p) + c'(d+u')(b+q')$$

Solution symétrique de l'équation à 3 inconnues.

Soustraction et Division.

$x + b = a$.	$bx = a$
$b < a$	$a < b$
$x = ab' + au$	$x = a + b'v$
$(b+a) - b = a - b$	$ba : b = a : b$.

Exception à la loi associative.

$(a+c) - (b+c) = a - b$, si $ab'c' = ab'$, $a + c = a$,

c.à.d. si : $c < b$.

$ac : bc = a : b$, si : $ac = a$, $b' + c' = a'b'$.

c.à.d. si : $b < c$.

Formules analogues à celles de De Morgan :

$(a-b)' = a' : b'$ | $(a:b)' = a' - b'$.

Ch. III. Expressions existentielles.

x_j signifie que x existe : $x \neq 0$.

$x + w$ signifie que x n'est pas tout : $x \neq 1$.

Le signe d'égalité $\equiv$ signifiera que le second membre résulte du premier (mais non inversement)

$$(xyz)j = (xj.\,yj.\,zj)j.$$

$$(x+y)j \equiv xj_1 + yj_1$$

j_1 symbole affaibli, implique seulement alternative.

$$xj_1 + yj_1 + zj_1 + \ldots = (x+y+z+\ldots \mp 0)$$

Échec à la loi distributive de l'addition.

$$(x+y+z+\omega) \equiv (x+\omega)+(y+\omega)+(z+\omega)+\omega$$

$$xy+\omega \equiv (x+\omega_1)(y+\omega_1)$$

ω_1 symbole affaibli, impliquant alternative.

Tout symbole fort absorbe un symbole faible.

$$(xj)' \equiv x'+\omega, \qquad (x+\omega)' \equiv x'j.$$

Donc $\quad j' = \omega, \qquad \omega' = j$

Lettres ombrales. $\quad x\alpha = xaj$

α indique l'affirmation que xa existe (n'est pas nul)

$$(x+\alpha') = x+a'+\omega$$

indique que x ne contient pas tout a (que $x+a'$ n'est pas tout)

Les symboles $x\alpha$, $x+\alpha'$ sont indivisibles, et représentent proprement x, avec une assertion relative à x

A part cela les lettres ombrales obéissent aux lois du Calcul logique. Seulement on a:

$$x(\alpha+\beta) \equiv x\alpha_1 + x\beta_1$$

$\alpha_1\,\beta_1$ formes affaiblies (alternatives).

$$x\alpha + x\beta \equiv x\alpha.\,x\beta \qquad x\alpha+\beta \equiv (x+\beta)\alpha.$$

$xy.j = x\eta . y\xi \qquad x+y+\omega = (x+\eta)+(y+\xi)$

Elimination. Si: $f(x, y, z, \ldots)j$, son maximum ne peut être nul; donc: $(a+b+c+\ldots)j$

Si: $f(x, y, z, \ldots)+\omega$, son minimum ne peut être 1; donc $abc\ldots+\omega$.

Solution des expressions existentielles à une inconnue.

$ax.j$: $\quad x = wa.j + ua' = p\alpha \equiv x\alpha.$

$b x'.j$: $\quad x = (w b.j.+u')' = (x'\beta)' \equiv x+\beta'$

$(ax+bx')j$: $\equiv ax.j_1 + bx'.j_1 \quad x \equiv (x+\beta_1')\alpha_1$

α_1, β_1 formes affaiblies (alternatives) si $ab=0$.

Si $ab.j$, x reste indéterminé.

$ax+\omega$: $\quad x+\omega$, si $a=1$.

$b'x+\omega$: $\quad xj$, si $b=1$.

$ax+b'x+\omega$: $\quad x=(x+\beta_1)\alpha_1'$ si $a'b'=0$.

Equations et expressions existentielles à une inconnue.

Cf Miss Ladd, ap. Studies in Logic (Johns Hopkins Univ.)

Ch. IV : Application à la Logique

Pour exclure les formes nugatoires, on écrit :

$aj < bj$ au lieu de $a < b$

ou : $aj \equiv ab.j$ —— $a = ab.$

~~ou~~ et : $a+w \in b+w$ ou $a+w \equiv (a+w)(b+w)$

pour exclure le cas où $b = 1$.

Syllogismes classiques (Camenos pro Camenes)

Syllogismes à prémisses trop forts :

Darapti : $bj \equiv bc.j$, $bj \equiv ab.j$,

d'où : $bj \equiv bac.j$, donc $ac.j$. (Darii)

Felapton : $bc = 0$, $bj \equiv ab.j$,

d'où : $abc'.j$, donc $ac'.j$. (Ferio)

Bramantip : $cj \equiv bc.j$, $bj \equiv ab.j$,

$bc.j \equiv abc.j$, donc $ac.j$. (Darii)

Camenos : $cj \equiv bc.j$, $ab = 0$,

$bc.j \equiv a'bc.j$, donc $a'c.j$ (Ferio.)

Fesapo : $bc = 0$, $bj \equiv ab.j$,

$ab.j \equiv abc'.j$, donc $ac'.j$. (Ferio)

Ch. V : Interprétation propositionnelle

Complexes conjonctifs ($\times$) disjonctifs (+.)

Equivalence : identité des motifs d'assentiment.

Identification avec l'Algèbre de la Logique.

Le Zéro exprime l'absence de tout motif, donc le rejet de la proposition.

L'Univers est l'ensemble des propositions admises comme absolument vraies : soit Lois de la pensée, soit conventions qcques (jeu de billard)

Les prop $= 0$ sont condamnées par elles-mêmes.

Les prop $= 1$ sont évidentes par elles-mêmes.

Extension de la conversion : convertir une prop. c'est en déduire une autre au moyen des lois de l'Univers.

Contradictoires : $xx' = 0$, $x + x' = 1$.

Extension de cette notion, si 1 désigne d'autres prop que les lois de la pensée.

$x < y$ signifie que les motifs de assentiment de x sont compris dans ceux de y.

Expressions existentielles : x_j signifie que x n'est pas absurde (contraire aux lois de l'Univers)

$x + \omega$ exprime que x n'est pas évidente.

$x\eta = xy_j$ $\qquad$ $x + \overline{\eta} = x + \overline{y} + \omega$.

Méthode de MacColl pour traduire les propositions traditionnelles A, E, I, O.

Prédication primitive : « Ceci est un A » $= x$.

x' est une négation primitive.

$x = 0$ signifie que le prédicat ne s'applique à rien ;

$x = 1$ ——— s'applique à tout.

Les prédications primitives combinées doivent s'entendre comme appliquées au même sujet.
Dès lors les prop A, E, I, O se traduisent par :

$x = xy$, $x = xy'$, $xy.j$, $xy'.j$.

ou : $xj \equiv xy.j$, pour exclure les cas négatoires.

Livre III : Multiplicités de positions.

Géométrie projective à n dimensions.
Les lettres grecques désignent des nombres. Un extraordinaire est : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$

$e_1 e_2 \ldots e_n$ étant n éléments de la multiplicité.
Intensité : propriété secondaire. Deux objets sont semblables ou équivalents quand ils ne diffèrent que par le intensité. L'intensité de αe est α.
Un objet de intensité 0 est 0. — L'équation :

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$ implique les n

équations : $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, … $\alpha_n = 0$.

Deux objets sont congruents $(a \equiv b)$ quand ils ne diffèrent que par le intensité : $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$.
$a = \lambda b$.

Les n unités e définissent une région à $(n-1)$ dim.
k unités e définissent une sous région de $(k-1)$ dim.
Des extraordinaires sont dépendants les uns des autres, quand il y a entre eux une relation linéaire.
~~On~~ ne peut trouver ~~plus~~ dans une région de $(n-1)$ dim. plus de n extraordinaires indépendants.

Tout ensemble de n extraordinaires indépendants définit la région complète à $(n-1)$ dimensions.
Une sous-région coordonnée est définie par k unités e.
Région à 1 dimension : $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$.
à 2 dim. : $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$.

Lieux. Définis par une ou plusieurs éq. de la forme $\varphi(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = 0$.
Un lieu défini par k éq. indépendantes a $(n-k-1)$ dimensions.
Un lieu défini par k éq. linéaires contient $(n-k)$ éléments indépendants. C'est un lieu plan. Donc un lieu plan est une sous-région.
Un lieu défini par $(k+l)$ éq. dont k sont linéaires est un lieu de $(n-k-l-1)$ dim. dans une région de $(n-k-1)$ dimensions.
Un lieu qui a une dimension de moins que la région qui le contient est un lieu surface, défini par une seule équation non linéaire dans cette région.
Un lieu à 1 dim. est une ligne. S'il est plan, droite.
Un lieu de $(k-1)$ dim. non contenu dans une région de k dim. est un lieu courbe. (dans le plan)
Une courbe plane est un lieu-surface. Une courbe gauche est un lieu-courbe ; une surface est un lieu surface.

Chapitre II. Lignes droites et plans.

Un point p sur une droite aa' est :

$$p = \xi_1 a + \xi_1' a'$$

Rapport anharmonique de 2 points : $\frac{\xi \xi_1'}{\xi_1 \xi'}$

Rapport harmonique $= -1$. $\xi a + \xi' a'$, $\xi a - \xi' a'$.

Rangées homographiques.

Transformations linéaires. 3 classes.

1° Transf. hyperboliques, où les 2 points doubles sont réels ; 2° elliptiques, où ils sont imaginaires ; 3° parabolique, où ils sont confondus.

Dans une région de $(k-1)$ dimensions, $k+1$ points sont reliés par une équation linéaire. Ainsi : 3 points sur une droite ; 4 points sur un plan.

Figure de référence : formée en joignant 2 à 2 les n points $e_1\ e_2 \ldots e_n$.

Étant pris un point sur chaque arête de la figure, la condition nécessaire et suffisante pour que tous ces points soient complanaires est que les 3 points situés sur les arêtes qui joignent 3 sommets quelconques soient collinéaires.

Perspective. Si les n sommets de 2 figures de référence sont en perspective, les arêtes homologues concourent dans un même plan. Et réciproquement.

Quadrilatère complet.

Chap. III. Quadriques.

Equation d'une quadrique : $(\alpha X x)^2 = 0$.

Pôles et polaires : Equation : $(\alpha X x X x') = 0$.

L'élément x' est le pôle du plan $(\alpha X x X x') = 0$.

Génératrices ; régions planes (réelles ou imaginaires) contenues dans la quadrique ; définies par $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ points indépendants, suivant que n est pair ou impair.

Coordonnées conjuguées. Soit $m = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$:

$$j_1 \, j_2 \ldots j_m \quad k_1 \, k_2 \ldots k_m$$

ces $2m$ éléments sont sur la quadrique, ~~et~~ chaque j est le polaire réciproque des k qui n'ont pas le même indice, et inversement.

Si un point j, est tel que toute droite qui passe par lui et un autre point de la quadrique y est contenue entièrement, la quadrique est conique.

Lieux courbes définis par k quadriques.

Quadriques fermées : quand il y a des points tels que toute droite menée par eux coupe la quadrique en 2 points réels. Un tel point est dit intérieur. Les autres points (non situés sur la quadrique) sont dits extérieurs.

Relations des pôles et polaires à l'extérieur ou à l'intérieur.

Une quadrique fermée n'a pas de génératrices réelles. Deux points intérieurs ou deux points extérieurs ~~ont~~ donnent le même signe à $(\alpha X x)^2$; un point intérieur et un point extérieur donnent des signes contraires.

Quadriques coniques : leur caractéristique
Equations réciproques (c.à.d tangentielles)

Chap. IV. Intensité.

Equation définissant l'intensité α de $\Sigma_i \alpha_e$:
$$\alpha = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$$
f est une fonction homogène du 1er degré. Forme générale :
$$\Sigma\left[\frac{\varphi_\lambda(\alpha_1 \dots \alpha_n)}{\varphi_\mu(\alpha_1 \dots \alpha_n)}\right]^{\frac{1}{\lambda-\mu}}$$
On adoptera la forme : $\varphi_\mu(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 1$.
Les coefficients qui vérifient cette équation sont les coefficients de l'élément de intensité 1.
Lieu de intensité zéro : $\varphi_\mu(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0$.
Chaque point de intensité zéro doit avoir au moins une coordonnée infinie.
Lieu plan de intensité zéro. L'équation qui définit l'intensité est : $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 1$.
Lieu quadrique de intensité zéro. L'intensité du point x est $+[(\alpha X x)^2]^{\frac{1}{2}}$.
Il y a des éléments de intensité imaginaire si la quadrique est réelle (intérieurs ou extérieurs)
- Éléments antipodes et intensités opposées.
$(\alpha X x)^2 = (\alpha X - x)^2$ $\quad$ x et $-x$ ont même intensité.
On les considère comme opposés, bien que $x \equiv -x$.
Une région à 1 dimension est illimitée et fermée.
Elle en coupe une autre en 2 éléments antipodes.

Segment intercepté par deux éléments $e_1 e_2$:
si le lieu d'intensité 0 est linéaire, ce segment est celui qui ne coupe pas ce lieu.
Si le lieu de intensité 0 est une quadrique, réelle et close, et si l'on identifie les éléments antipodes $+x, -x$, le segment e_1e_2 est celui qui ne rencontre pas la quadrique.
Si le lieu d'intensité 0 est une quadrique imaginaire, et si l'on distingue les deux éléments antipodes, le segment $e_1 e_2$ est celui qui ne contient aucun des deux antipodes e_1 $-e_2$.

Livre IV. Calcul de l'extension.

Ch I : Multiplication combinatoire.

$$ab = \Sigma \alpha e . \Sigma \beta e = \Sigma\Sigma (\alpha_h \beta_k e_h e_k)$$

Les n^2 éléments $e_h e_k$ forment une multiplicité du 2e ordre et ainsi de suite. Mais ces multiplicités peuvent être déterminées par des équations de conditions.

Equations de condition invariantes. Deux types :

1° $\quad e_h e_k + e_k e_h = 0, \qquad e_h e_h = 0.$

2° $\quad e_h e_k = e_k e_h$

Le 1er type est la multiplication combinatoire, qui obéit à la loi associative. Un produit change de signe chaque fois qu'on intervertit 2 facteurs voisins.

$$ab = \Sigma' (\alpha_h \beta_k - \alpha_k \beta_h) e_h e_k .$$

$$ab + ba = 0, \qquad aa = bb = 0.$$

Un produit de plus de n facteurs est nul (car ces facteurs ne sont pas indépendants.)

Multiplicités dérivées. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ combinaisons multiplicatives des n unités; elles définissent la multiplicité dérivée du k^e ordre. Celle du n^e ordre se réduit à l'élément $e_1 e_2 \dots e_n$.

~~Les gr~~ Grandeurs extensives. Le produit de k éléments indépendants définit une sous-région de $(k-1)$ dimensions. Deux produits congruents définissent la même sous-région à des intensités différentes. On peut identifier cette sous-région à l'élément de la multiplicité du k^e ordre défini par ce produit. La multiplicité de positions est alors une multiplicité extensive. Le produit de k éléments du 1er ordre (points) est un élément régional ou une grandeur extensive du k^e ordre.

Grandeurs extensives simples et composées.
Les éléments de la mult^é dérivée qui sont des produits d'éléments du 1er ordre sont appelés simples; eux seuls seront appelés éléments régionaux.
Un élément composé est la somme d'élém simples.
Le produit d'un élément du h^e ordre et d'un du k^e est un élément du $(h+k^e)$.
Le produit de deux régions est nul quand elles ont un ou plusieurs éléments communs. Sinon, il est la région qui les contient toutes deux.
Tous les éléments du $(n-1)^e$ ordre sont simples.


ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Chap. II : Multiplication régressive.

La mult. combinatoire est progressive : $h+k < n$.
La mult. régressive s'applique au cas où : $h+k > n$

<u>Suppléments.</u> E_k étant le produit de k unités, son supplément $|E_k$ est le produit des $(n-k)$ autres tel que

$$E_k E_{n-k} = 1. \quad \text{donc} \quad E_k|E_k = 1.$$

$$|(e_1 e_2 \dots e_n) = 1, \quad \text{donc} \quad |1 = 1.$$

Le symbole $|$ est distributif.

$$||E_k = (-1)^{k(n-k)} E_k \qquad ||A_k = (-1)^{k(n-k)} A_k.$$

<u>Définition de la multiplication régressive</u> : $h+k > n$:

$$|A_h A_k = |A_h | A_k$$

Le produit régressif de 2 grandeurs ~~est le~~ a pour supplément le produit de leurs suppléments.

La formule précédente vaut également pour un produit progressif.

<u>Produits purs et mixtes.</u> Un prod. pur est associatif.

<u>Règle du facteur médian</u> $E_h E_k . E_h E_l = (E_h E_k E_l) E_h$.

$$A_h A_k . A_h A_l = (A_h A_k A_l) A_h$$

quand $h+k+l = n$ ou $2n$.

<u>Règle générale</u> : Si A_h, A_k sont 2 ~~régions~~ grandeurs simples, $h+k = n+m$, elles ont une région commune C_m de $(m-1)$ dim. Alors : $A_h = B_{h-m} C_m$, $A_k = C_m B_{k-m}$.

$$A_h A_k = B_{h-m} C_m . A_k = (B_{h-m} A_k) C_m.$$

$$= A_h . C_m B_{k-m} = (A_h B_{k-m}) C_m.$$

La multiplication régressive est indépendante des éléments de référence.

En résumé, si $h+k<n$, $P_h P_k$ représente la région qui contient les 2 régions P_h, P_k, à moins qu'elles n'empiètent, alors $P_h P_k = 0$.

Si $h+k>n$, $P_h P_k$ représente la région commune aux 2 régions P_h, P_k, à moins qu'elles n'aient en commun une région de ordre supérieur à $h+k-n$, alors $P_h P_k = 0$.

Si $h+k=n$, $P_h P_k$ est un nombre.

Théorèmes de Müller (Math. Annalen, 1897.)

Applications et exemples. Éq. de la sous région P:

$$xP = 0. \qquad (x \text{ est un point})$$

Condition pour que le plan X_{n-1} contienne P.

$$X_{n-1}P = 0.$$

Conditions pour que le point x appartienne à la droite ab, au plan abc, à la région $abcd$:

$$xab=0, \quad xabc=0, \quad xabcd=0.$$

Dans un espace à plus de 2 dim, le produit d'une ligne et d'un plan est régressif. Deux lignes ab, cd se coupent si: $\quad abcd=0.$

Point de intersection d'une ligne ab et d'un plan P_{n-1}:

$$P_{n-1}.ab = (P_{n-1}b)a - (P_{n-1}a)b.$$

Si la ligne est contenue dans le plan, on a:

$$P_{n-1}b = P_{n-1}a = 0, \qquad P_{n-1}xab = 0.$$

L'intersection de 2 plans (d'ordre $n-1$) est un sous-plan (d'ordre $n-2$.)
Si 4 plans ont un sous-plan commun, les 4 points d'intersection sur une droite qcque ont un rapp anharm déterminé.

Chap. III : Suppléments.

Le supplément d'un élément P_k est un élément $|P_k$ de l'ordre $n-k$. $|x$ est le plan supplémentaire du p. x.
Si P_k est le produit de k points, son supplément est la région commune aux k plans supplémentaires.
Des points situés chacun dans le plan supplémentre de l'autre sont mutuellement normaux.
Points sibinormaux. Quadrique sibinormale, lieu de ces points.
Système normal de points : ensemble de n points indépendants mutuellement normaux.
Un point p a son intensité normale quand :

$$p|p = 1.$$

Extension de la définition des suppléments. Cette théorie est une extension de celle des figures polaires réciproques.
Différentes espèces de suppléments.
Points et droites normales. Les couples de points normaux sur une droite forment une involution dont les points doubles sont les points sibinormaux.
Régions mutuellement normales.

Éléments sibinormaux. Dans une région définie (sous)
par k éléments sibinormaux indépendants et
mutuellement normaux, chaque élément est sibi-
normal; et deux éléments qcqs sont normaux
entre eux.

Plans sibinormaux: a étant un p. sibinormal,
le plan $|a$ est tangent à la quadrique sibin. en a.
Éq. de la quadrique en plans: $(X|X) = 0$.
condition pour que le pl X contienne son suppl. $|X$.

Région complète à trois dimensions.

Multiplication interne: consiste à considérer le
signe $|$ comme un signe de combinaison: $P_h | P_k$.
S'oppose à la mult^{on} progressive et régressive.
La mult^{on} interne est toujours relative à une
quadrique sibinormale, dont l'éq. est: $(x|x) = 0$.

Règle du facteur moyen (supposé)

Multiplication interne de régions normales.

Formule générale pour la multiplication interne.

Équation plane d'une quadrique.

Chap. IV. Géométrie descriptive.

Deux éléments qui ne diffèrent que par l'intensité
seront congruents.
Le produit de 2 points est la ligne qui les joint;
le produit de 2 droites est leur point d'intersection.

Exemple de la méthode.

Construction de Staudt.

On peut construire sur la ligne ac tout point $a + \xi c$, ξ étant un nombre réel quelconque ; et dans le plan abc, tout point $a + \xi b + \eta c$.

Constructions de Grassmann. Dans le plan $a a_1 a_2$, construire le point $a + \varphi(\xi_1, \xi_2)(a_1 + a_2)$, φ étant une fonction entière homogène de ξ_1, ξ_2.

Projection. Définition de la projectivité.

~~Le~~ Trois points en ligne droite sont projectifs avec trois autres points en ligne droite.

k points d'une sous-région de $k-2$ dimensions sont projectifs avec k points d'une autre sous-région de $k-2$ dimensions. — Il faut $k-1$ projections.

Le type le plus général de transformation projective équivaut au type le plus général de transformation linéaire.

Chap. V : Géométrie descriptive des coniques et cubiques.

Équation d'une conique : $xaBcDex = 0$.

C'est l'équation générale du second degré.

Soit : $b = B.ce$, $d = D.ca$, $g = BD$.

Autre forme de l'éq. : $(xa.bg)(eb.ad)(dg.ex) = 0$ expression du théorème de Pascal : la conique passe par les 5 points a, b, d, e, g.

Forme plus générale : $xa_1B_1a_2B_2 \ldots B_{n-1}a_n x = 0$.

Si les n côtés d'un polygone passent par n points fixes et que $(n-1)$ sommets décrivent $(n-1)$ droites, le n^e

sommet décrit une conique. (Grassmann)

Construction linéaire des cubiques. Les équations suivantes caractérisent les points d'une cubique, mais ne permettent pas de les construire :

$$xaAa_1 . xbBb_1 . xc = 0.$$

$$xaBcDxD_1c_1B_1a_1x = 0.$$ (on peut écrire $B_1 = B$.)

ou $$x . xaBcD . xa_1B_1c_1D_1 = 0.$$

$$xaA . xbB . xcC = 0.$$

Construction de Chasles.

Chap. VI : Matrices.

Une matrice représente une transformation linéaire.

$\phi = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{e_1 e_2 \ldots e_n}$ comme coefficient, signifie qu'on remplace dans le produit e_k par a_k. (Cayley.)

L'opérateur φ équivaut à une matrice formée des coefficients α de la substitution linéaire des $\underline{a}$ aux $\underline{e}$

$$a_k = \alpha_{k1} e_1 + \alpha_{k2} e_2 + \ldots + \alpha_{kn} e_n$$

Si deux matrices opérant sur $\underline{n}$ éléments indépendants du 1er ordre donnent les mêmes résultats, elles sont équivalentes dans tous les cas.

La somme de 2 matrices équivaut à une seule matrice quand elles opèrent sur un même élément du 1er ordre.

Le produit de 2 matrices équivaut dans tous les cas à une seule matrice. Il est associatif.

Si une matrice est susceptible de 2 formes équivalentes :

$$\frac{a_1, a_2 \ldots a_n}{e_1, e_2, \ldots e_n} \quad \text{et} \quad \frac{d_1, d_2, \ldots d_n}{c_1, c_2, \ldots c_n}$$

on a l'égalité : $\dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{e_1 e_2 \ldots e_n} = \dfrac{d_1 d_2 \ldots d_n}{c_1 c_2 \ldots c_n}$.

Le rapport $\dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{e_1 e_2 \ldots e_n}$ = le déterminant associé, c.à.d. le déterminant des coefficients α.

Si les n éléments du numérateur ne sont pas indépendants, la matrice peut être mise sous une forme telle que quelques-uns soient nuls. Le déterminant associé est alors nul. La région correspondante (au dénominateur) s'appelle espace nul. L'ordre de nullité est le nombre des éléments nuls.

La nullité du produit de deux matrices n'est pas inférieure à la plus grande de leurs nullités, ni supérieure à la somme de leurs nullités. (Sylvester)

Points latents : point x tel que : $\varphi x = \rho x$, ρ étant un nombre, appelé racine latente de la matrice. La transformation φ ne change que l'intensité des points latents.

Si les n racines latentes sont inégales, il y a n points latents indépendants, qui leur correspondent respectivement.

Régions semi-latentes : définies par k points latents. A $(k-1)$ dimensions si toutes les racines latentes sont inégales.

Si X est un élément régional appartenant à une région semi latente, φX appartient à la même région.

Equation identique de la matrice :

$(\varphi - \rho_1)(\varphi - \rho_2)\dots(\varphi - \rho_n)\, x = 0$
quelque soit x, $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$ étant les n racines.
Région latente. Quand une racine est répétée k fois, il lui correspond (au plus) k points ~~latents~~ indépendants qui définissent une région (de (k-1) dimensions) ~~latente~~, càd telle que chacun de ses points est un point latent.
Espèces de régions semi-latentes.
Vacuité d'une matrice. L'espace nul ~~correspond~~ est la région latente qui correspond à une racine latente nulle.
Si cette racine est répétée α fois, la matrice a une vacuité d'ordre α ($\geq$ l'ordre de sa nullité)
Matrices symétriques. Pour que: $x | \varphi y = y | \varphi x$, il faut que la matrice soit symétrique par rapport à la diagonale principale, quand les éléments du dénominateur forment un système normal.
Matrices symétriques et suppléments.
Correspondance des plans aux points: $X = | \varphi x$.
Matrices obliques: telles que $\alpha_{hk} + \alpha_{kh} = 0$, et que les éléments de la diag. princ. soient nuls.
Alors: $x | \varphi x = 0$, $\quad x | \varphi y + y | \varphi x = 0$.

Livre V : Multiplicités extensives à 3 dimensions

Chap. I : Systèmes de forces.

Théorie non-métrique des forces. Dans une multiplicité extensive à 3 dimensions, les éléments linéaires (doués de sens, d'intensité, et additifs) sont analogues à des forces. ~~Aucune~~ Toute notion métrique est exclue, ainsi que l'axiome des parallèles (par de parallélogramme de forces)

Récapitulation de formules.

$a_1 a_2 a_3$ étant des points, $A_1 A_2 A_3$ des plans, on a :

$$a_1 a_2 a_3 . A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} a_1 A_1 & a_1 A_2 & a_1 A_3 \\ a_2 A_1 & a_2 A_2 & a_2 A_3 \\ a_3 A_1 & a_3 A_2 & a_3 A_3 \end{vmatrix}$$

de même quel que soit le nombre des a et des A :

$$a_1 a_2 . A_1 A_2 = a_1 A_1 . a_2 A_2 - a_1 A_2 . a_2 A_1 .$$

Multiplication interne

$$abc | def = \begin{vmatrix} a|d, & a|e, & a|f \\ b|d, & b|e, & b|f \\ c|d, & c|e, & c|f \end{vmatrix} \quad \text{etc}$$

Propriétés élémentaires d'une force simple

Une force est le produit de 2 points ou de 2 plans. Elle peut se décomposer en une somme de 2 forces concourantes dans le même plan qu'elle, ou de deux forces dont l'une passe par un point donné et l'autre est située dans un plan donné.

Propriétés élémentaires d'un système de forces.

Un système qque S peut s'écrire :

$$S = ap + AP$$

a étant un point donné et A un plan donné.

$$aA.S = a.AS + aS.A$$

Un système S peut se réduire à la somme de 2 forces :

$$S = ab + cd.$$

Condition pour que S se réduise à une force unique :

$SS = 0$, ou : $abcd = 0$.

Lignes conjuguées : telles que ab et cd

La conjuguée de ab est : $S - \frac{1}{2}\frac{(SS)}{(abS)}ab$

de AB est : $S - \frac{1}{2}\frac{(SS)}{(ABS)}AB$

Lignes, points et plans nuls.

Moment de S par rapport à L : LS.

Ligne nulle, si : $LS = 0$.

Les lignes nulles forment un complexe linéaire.

Plan nul du point a : aS.

Point nul du plan A : AS.

Propriétés des lignes nulles.

Toutes les lignes nulles passant par le p. a sont dans le plan nul du point a. — Prop. corrélative.

Lignes en involution : 6 lignes nulles par rapport à un système doivent satisfaire une condition.

Systèmes réciproques : $SS' = 0$.

Formules pour les systèmes de forces.

Chap. II : Groupes de systèmes de forces.

Tout système S peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \ldots + \lambda_6 S_6$$

$S_1 S_2 \ldots S_6$ étant indépendants.

Groupe double (à 1 dim) obtenu en donnant à $\lambda_1 \lambda_2$ toutes les valeurs.

— triple (à 2 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ —

quadruple (à 3 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ —

quintuple (à 4 dim) — $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5$ —

Un groupe de k-1 dim. est défini par k systèmes indépendants qui en font partie, ou par 6-k équations linéaires entre ses coordonnées λ.

Systèmes réciproques à des groupes : càd réciproques à tous les systèmes d'un même groupe.

Tous les systèmes réciproques à un groupe de k-1 dimensions forment un groupe réciproque de 5-k dimensions.

Lignes nulles communes et forces directrices.

Lignes nulles communes à tous les systèmes du groupe. Les systèmes qui se réduisent à une force unique s'appellent forces directrices du groupe.

Les lignes nulles communes d'un groupe sont les lignes directrices du groupe réciproque, et inversement.

Chaque ligne nulle commune d'un groupe coupe toutes les lignes directrices du groupe, et inversement.

— Groupes quintuples. N'ont aucune ligne nulle commune

excepté quand le système réciproque se réduit à une force.

Les lignes directrices d'un groupe quintuple forment un complexe linéaire.

Groupes quadruples et doubles.

Un groupe double a en général deux lignes directrices ;
——— quadruple ——— deux lignes nulles comm.
L'ensemble des lignes nulles communes d'un groupe double forme une congruence. Ce sont les lignes qui coupent les 2 lignes directrices du groupe.
L'équation des directrices : $(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_k S_k)^2 = 0$, s'appelle l'équation directrice du groupe.
Un groupe double dont l'équation directrice a 2 racines égales s'appelle parabolique.
Il n'y a qu'une directrice, qui est ~~la~~ une ligne nulle commune aux autres systèmes du groupe.

Rapport anharmonique de systèmes.

Le rapp. anh. des 4 points nuls d'un plan par rapport à 4 systèmes d'un groupe double est le même pour tous les plans. C'est par définition le rapp. anh. de ces 4 systèmes. (Tous les points nuls sont collinéaires.)
Le groupe se décompose en couples de syst. réciproques ; les ou la directrices étant leur propre réciproque.
Deux syst. réciproques sont conjugués harmoniques par rapport aux deux directrices.

Un groupe forme donc une involution qui a pour foyers les deux directrices. Il est elliptique, si les foyers sont imaginaires; hyperbolique si réels.
Les mêmes propriétés appartiennent au groupe des complexes linéaires qui ont en commun une même congruence.

Groupes doubles suisupplémentaires.

On prend le supplémentaire |S par rapport à une quadrique donnée. Les 2 systèmes S et |S définissent un groupe double, dit suisupplémentaire parce qu'il contient le supplémentaire de chacun de ses systèmes.

Un système qui n'est pas suisupplémentaire a en gén. 2 lignes conjuguées qui sont supplémentaires (c.à d. polaires réciproques par rapport à la quadrique)
En gén. un complexe linéaire a quatre lignes qui sont génératrices d'une quadrique donnée, groupées deux d'un système et deux de l'autre.

Groupes triples.

Les lignes nulles communes (dont l'éq. est: $x S_1 . x S_2 . S_3 = 0$.) d'un groupe G sont les génératrices d'une quadrique; ses lignes directrices (l. nulles communes du groupe réciproque G') sont les génératrices de l'autre système de la même quadrique.
Inversement, toute quadrique définit un couple de groupes triples réciproques.
A chaque ligne directrice correspond un sous-groupe

double parabolique dont elle est directrice.
En gén., une quadrique qcque a deux génératrices d'un système et deux de l'autre parmi les lignes nulles d'un système de forme qcque. Par exception, elle peut avoir toutes les génératrices d'un système, ou bien une seule.

Trios conjugués de systèmes d'un groupe triple.
On prend S_3 réciproque du sous-groupe défini par S_1, S_2 ; et dans ce sous-groupe, on prend S_1 et S_2 réciproques. Alors chacun des trois est réciproque du sous groupe formé par les 2 autres.

Chap. III : Invariants des groupes.

Un invariant d'un groupe de $(k-1)$ dimensions est une fonction qui se reproduit elle-même par la substitution (linéaire) de $\underline{k}$ syst. indépendants à $\underline{k}$ autres syst. indépendants, multipliée par un facteur numérique qui est une puissance entière du déterminant de la substitution.

Invariants nuls d'un groupe double :

$$x S_1 . x S_2 , \qquad X S_1 . X S_2 .$$

Ce sont la ligne nulle commune qui passe par le p. $\underline{x}$ et celle qui est contenue dans le plan X.

Invariants harmoniques d'un groupe double

$H(x) = x S_1 . S_2 - x S_2 . S_1 \quad H(X) = X S_1 . S_2 - X S_2 . S_1$

$H(x)$ est, sur la ligne nulle commune qui passe par $\underline{x}$,

le conj harm de x par rapp aux 2 p. où cette ligne coupe les 2 directrices.

$H(X)$ est un plan passant par la l. nulle comm située dans le pl X, et conj harm de X par rapp aux 2 pl. qui contiennent la l nulle comm et les 2 directrices.

Si le groupe est parabolique et a D pour unique directrice, $H(x)$ est le point nul du plan xD, et $H(X)$ est le plan nul du point XD.

Si le p. x a pour lieu le pl X, le p $H(x)$ a pour lieu le pl. $H(X)$.

Formule remarquable $XH(x) = xH(X)$.

Invariants pôles et polaires d'un groupe triple

Chap. IV : Matrices et forces

Transformations linéaires à 3 dimensions.

On considérera des matrices de nullité zéro.
Région latente : où pour tout x on a : $qx = x$
Semi-latente : où l'on a : $qx = \gamma x + y$
Une droite semi-latente a au moins un point latent.
Un plan semi-latent de 1e esp. contient des droites semi-latentes (de 1e espèce)

Enumération des types de régions latentes et semi latentes.

Soient $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ les 4 racines distinctes de la matrice q. Soient $e_1 e_2 e_3 e_4$ les points latents correspondants. Les régions semi-latentes sont les 6 arêtes et les 4 faces du tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$.
Cas où une ou plusieurs racines sont répétées.

Matrices et forces.

Si $qS = S$, le système S est un système latent de la matrice q.
Si tout système S d'un groupe G donne un système qS du même groupe, G est un groupe semi-latent de la matrice q.

Systèmes latents et groupes semi-latents.

Une force sur une ligne semi-latente est latente.

Enumération des types de systèmes latents et de groupes semi-latents.

Transformation d'une quadrique en elle-même

Une matrice peut transformer une quadrique en elle-même, quand le groupe triple qui la définit est semi-latent. La transformation est *directe*, si chaque génératrice est transformée en une génératrice du même système; et *oblique* si — en une génératrice de l'autre système.

Transformation directe des quadriques.

Transformation oblique des quadriques.

Aucune génératrice n'est semi-latente.

Livre VI : Théorie de la Métrique

Chap. I : Théorie de la distance

Dans une multiplicité de positions, il n'y a pas de relation définie entre 2 points, ni même entre 3; car si tout point p d'une ligne peut se représenter par: $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, le rapport ξ_1/ξ_2 ne correspond à p que moyennant une hypothèse sur l'intensité des p. $e_1 e_2$. Seul le rapport anharmonique de 4 points est une fonction indépendante de leurs intensités.

Une *multiplicité spatiale* est une mult. de positions où l'on a défini la relation quantitative de 2 points, appelée leur *distance*.

Axiome I : Deux points qcques définissent une grandeur unique et déterminée, qui mesure leur séparation, et qui s'annule lorsqu'ils coïncident.

Axiome II : Si p, q, r sont 3 p en ligne droite, q

entre p et r, on a : $pq + qr = pr$

Axiome III : a, b, c étant 3 p quelconques, si ab et bc sont finies, ac l'est aussi. Si ab est finie et bc infinie, ac ~~l'est aussi~~ infinie. Si ab et bc sont réelles, ac l'est aussi.

Sur une droite, il n'y a qu'un point situé à une distance donnée, dans un sens donné, d'un p. donné.

Rangées congruentes de points : si les distances homologues sont égales.

Deux rangées congruentes sont homographiques.
Deux rangées homographiques sont congruentes si trois points de chacune sont congruents.

Théorie de la distance de Cayley

Sur une droite, soit un ~~cp~~ couple de points absolu a_1, a_2, et 3 p quelconques :

$$x_1 = \lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2$$
$$x_2 = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2$$
$$x_3 = \lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2$$

Les rapp anharm $(x_1 x_2, a_1 a_2)$, $(x_1 x_3, a_1 a_2)$, $(x_2 x_3, a_1 a_2)$ sont :

$$\rho_{12} = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1}, \quad \rho_{13} = \frac{\lambda_1 \mu_3}{\lambda_3 \mu_1}, \quad \rho_{23} = \frac{\lambda_2 \mu_3}{\lambda_3 \mu_2}$$

de sorte que : $\log \rho_{12} + \log \rho_{23} = \log \rho_{13}$.

Klein définit la distance de $x_1 x_2$ par l'expression :

$$\frac{\gamma}{2} \log \rho_{12}.$$

Si l'absolu est réel, γ doit être réel, et $\rho_{12} > 1$. (définition hyperbolique) Si l'absolu est imaginaire γ doit être imaginaire, la dist. est : $\frac{\gamma}{2i} \log \rho_{12}$.
(définition elliptique)

Cas limite où les 2 p. $a_1 a_2$ coïncident en u : la distance des p. $e+\xi u$, $e+\eta u$ devient alors :

$$\delta(\eta-\xi) \quad \text{(déf. parabolique)}$$

Théorème de Klein. Cette définition de la distance de 2 points est la seule compatible avec les propos. sur les rangées congruentes.

Comparaison avec les axiomes de la distance :

La distance est (ax. I) une relation entre 2 points, et non entre 4. Mais les 2 p. de l'absolu sont à dist. infinie, s'ils sont réels ; ou bien sont imaginaires.

Multiplicités spatiales à plusieurs dimensions.

La partie d'une mult. spatiale où vaut la définition de la distance pour 2 p. quelconques réels (et où cette distance est réelle) s'appelle l'Espace. Le reste de la partie réelle de la multiplicité est l'Antispace.

Les points qui forment l'absolu sur chaque ligne forment une surface fermée ou imaginaire, comme elle coupe chaque ligne en 2 points, c'est une quadrique, appelée l'Absolu. ~~La partie réelle de l'espace située~~ L'Espace entier est enveloppé par elle. La partie réelle de la mult. spatiale qui est extérieure à l'Absolu forme l'Antispace.

Quand l'Absolu est réel : Géométrie ~~elliptique~~ hyperbolique

Quand il est imaginaire : Géométrie elliptique : forme polaire, où $+x$ et $-x$ sont le même point à des extrémités contraires ; forme antipodale où $+x$ et $-x$ sont des points distincts (antipodes) (G. sphérique)

Cas limite : Géométrie parabolique. de Klein)

Division de l'Espace. En G. elliptique polaire un plan ne partage pas l'espace, mais deux plans le partagent. Dans la forme antipodale, un plan divise l'espace; de même en G. hyperbolique (la droite réelle sort de l'espace c.à.d. de l'Absolue)

Espace elliptique. Prenons pour l'absolu la quadrique sibinormale: $x|x = 0$,
et pour pts réels ceux où: $x|x > 0$.

Distance de 2 points:

$$D(x, x_2) = \gamma \arccos \frac{\pm (x_1|x_2)}{\sqrt{(x_1|x_1)(x_2|x_2)}} = \gamma \arcsin \sqrt{\frac{(x_1 x_2|x_1 x_2)}{(x_1|x_1)(x_2|x_2)}}$$

Forme polaire. Soit x' le p. où la droite $\underline{xy}$ coupe le pl. polaire de x; de même y'. Le segment $\underline{xy}$ est celui où ne se trouvent pas x', y'; l'autre est le segment polaire.

Longueur des segments dans la forme polaire.

Paradoxe: Si z est sur le segment $x'y'$, aucun des 3 points x, y, z n'est situé entre les 2 autres (échec à l'axiome II.) $D(xy) + D(yz) + D(zx) = \pi\gamma$.

$D(xx') = D(yy') = \frac{1}{2}\pi\gamma$.

$D(yx') + D(x'y') + D(y'x) = \pi\gamma - D(xy)$.

Dans tous les cas: $D(xy) \leq \frac{1}{2}\pi\gamma$.

Forme antipodale. Le segment $\underline{xy}$ est celui qui ne contient pas les antipodes $-x, -y$; l'autre est le segment antipodal. Paradoxe: Si z est sur $(-x)(-y)$,

aucun des 3 points x, y, z n'est entre les 2 autres (exception à l'ax II) Mais :

$$D(xy) + D(yz) + D(zx) = 2\pi\gamma.$$

$$D(y,-x) = D(x,-y) = \pi\gamma - D(x,y).$$

Espace hyperbolique. Distance de 2 points réels :

$$D(xy) = \gamma \operatorname{arc\,cosh} \frac{\pm(x|y)}{\sqrt{(x|x)(y|y)}} = \gamma \operatorname{arc\,sinh} \sqrt{\frac{-(xy|xy)}{(x|x)(y|y)}}$$

Si $x|x > 0$ pour tout p. intérieur de la quadrique et si $e|x > 0$ pour tout p. x (e étant un p. fixe), il s'ensuit que $x|y > 0$ pour tout p. intérieur. Donc on devra choisir ~~pour~~ un signe tel que $(x|y)$ soit positif.

Il n'y a qu'un seul segment xy qui soit entièrement situé dans l'espace. Sa longueur est la distance xy. La distance d'un p. qcque à l'absolu est infinie. Par suite, la longueur d'une droite qcque à l'intérieur de l'espace est infinie.

Constante spatiale. On pourrait supposer que γ est différente pour chaque ligne et fonction des points x_1, x_2. On admettra qu'elle est constante pour toutes les lignes.

Loi de l'intensité dans la Géométrie elliptique et hyperbolique. On peut déterminer cette loi en disant que si x_1 et x_2 ont la même intensité, $x_1 + x_2$ est au milieu de leur distance. Il en résulte que : $(x_1|x_1) = (x_2|x_2)$

On aura : $(x|x) = 1$, si le point x a l'intensité 1.

Distances de plans et de sous-régions.

On définit la séparation de 2 plans par des formules analogues à celle de la distance de 2 points. Dans le système de mesure elliptique, cette séparation est l'angle des 2 plans. La loi d'intensité des éléments plan est analogue à celle des points.

Si 2 sous régions à $k-1$ dimensions sont contenues dans une sous-région à k dim (dont elles sont alors des plans), l'absolu de cette dernière région peut être considéré comme son intersection avec l'absolu de l'espace. $|X_k$ et $|Y_k$ sont alors les régions polaires absolues de X_k et Y_k. Leur séparation est égale à celle de ces 2 régions.

Géométrie parabolique

Chaque ligne rencontre l'absolu en 2 points coïncidants. Donc l'absolu ~~est~~ dégénère en 2 plans coïncidants.

L'éq. de l'absolu se réduit à : $\alpha_1 \xi_1^2 = 0$

Les $(n-1)$ points coordonnés $e_2\ e_3 \dots$ en sont dans le plan de l'absolu, à distance infinie ; e_1 est dehors.

Formule de la distance de 2 p. x, y :

$$d = \frac{\Sigma_i \beta_k^2 (\xi_1 \eta_k - \xi_k \eta_1)^2}{\xi_1 \eta_1}$$

Loi de l'intensité en Géométrie parabolique

Si l'on admet que $x_1 + y$ est au milieu de xy, on a : $\xi_1 = \eta_1$. Ainsi l'intensité ne dépend que de ξ_1 ; elle est prop. à ξ_1. La distance de 2 p. d'intensité 1 est : $\Sigma \beta_k^2 (\xi - \eta)^2$, qui peut se réduire à : $\Sigma (\xi - \eta)^2$

(Géométrie euclidienne)

Chap. II Géométrie elliptique

Trois points a, b, c déterminent 8 triangles, égaux deux à deux : si l'on appelle −a, −b, −c ; a', b', c', on a les 4 triangles différents : abc, a'bc, ab'c, abc'.
Soient A, B, C les angles déterminés par les segments ab, bc, ac : on a la formule

$$\cos\frac{bc}{\gamma} = \cos\frac{ab}{\gamma}\cos\frac{ac}{\gamma} + \sin\frac{ab}{\gamma}\sin\frac{ac}{\gamma}\cos A.$$

Dans le cas où l'un des 4 triangles abc a ses 3 côtés moindres que $\frac{1}{2}\pi\gamma$, on l'appelle principal : les 3 autres ont chacun 2 côtés plus grands que $\frac{1}{2}\pi\gamma$.
Dans le cas contraire il y a 3 triangles (principaux) qui ont chacun 1 côté supérieur à $\frac{1}{2}\pi\gamma$, et le 4e a ses 3 côtés supérieurs à $\frac{1}{2}\pi\gamma$.
Formules trigonométriques (analogies de Napier).
La circonférence d'un cercle de rayon ρ est : $2\pi\gamma\sin\frac{\rho}{\gamma}$.
Points intérieurs à un triangle : sont de la forme $\lambda a + \mu b + \nu c$, λ, μ, ν étant de même signe.
Toute droite située dans la sous-région à 2 dim. de abc, coupe 2 côtés intérieurt et 1 côté extérieurt, ou les 3 extérieurement. Le 1er cas a lieu si elle a un point intérieur au triangle.
Quadriques ovales. Si 3 p a, b, c sont intérieurs à une quadrique close, celle-ci coupe extérit les 3 côtés ~~du tr. abc~~ d'un des tr. abc. Si ce tr. est principal, la quadrique est ovale.
Une sphère est une quadrique close ; elle est ovale si son rayon est inférieur à $\frac{1}{4}\pi\gamma$. Toute quadrique ovale est intérieurement contenue dans une sphère de rayon $\frac{1}{4}\pi\gamma$.

Plans à une face. On définit les deux faces d'un plan P en considérant 2 p. a, b situés de part et d'autre (c.à.d. tels que le segment ab coupe le pl. P) et en les amenant ensuite à coïncider. A l'intérieur d'une sphère, on peut distinguer les 2 faces du plan. Mais si l'on fait décrire à un point une ligne droite située sur la même face du plan à partir du p. a, ce point revient en $-a$, coïncidant avec a, mais sur l'autre face (Klein, Math. Annalen, t. VI.)

Angles entre plans. Triangles stéréométriques (formés par 3 plans.) Mêmes formules que pour les triangles sphériques dans l'espace euclidien.

Perpendiculaires: $ab/ac = 0$.

Deux points mutuellement normaux sont à la distance $\frac{1}{2}\pi\gamma$. On les appelle quadrantaux.

Distance d'un point à un plan. Le plus court segment de la perp. menée du point au plan. Le pôle d'un plan en est à la distance maxima $\frac{1}{2}\pi\gamma$.

Perpendiculaire commune à 2 plans.

Distance d'un point à une sous-région.

Distance minima entre sous-régions. La ligne la plus courte ou la plus longue entre 2 sous-régions leur est perpendiculaire.

Sphères. Tout point de la sphère de rayon ρ et de centre b est à la distance $\frac{1}{2}\pi\gamma - \rho$ du plan pol. $/b$. Un plan est une sphère limite, de rayon $\frac{1}{2}\pi\gamma$.

Sous-régions parallèles. Toute sous-région qui n'est

ni un point ni un plan a des génératrices droites réelles.

Chap. III. Multiplicités extensives et Géom. elliptique

Intensité des forces. L'intensité d'un point x est $x|x$; celle d'un plan, $P|P$. Celle d'une force xy, sera suivant certaines conventions: $(x|x)^{\frac{1}{2}}(y|y)^{\frac{1}{2}} \sin \widehat{xy} = (F|F)^{\frac{1}{2}}$

Relations entre deux forces. Il y a 2 droites qui coupent les 4 forces $F, F', |F, |F'$; elles leur sont perpendiculaires. L'une est la plus courte, l'autre la plus longue entre F et F'. Elles sont supplémentaires: $ab = |cd$, et on a: $ac = bd = \frac{1}{2}\pi\gamma$.

Axes d'un système de forces. Un système S peut se réduire d'une manière et d'une seule à la forme:

$$S = a_1a_2 + \varepsilon|a_1a_2.$$

a_1a_2 et $|a_1a_2$ sont les axes, ε le paramètre du système.

Lignes parallèles. Si $F, F', |F, |F'$ sont génératrices d'une quadrique, elles sont coupées par une infinité de droites, et F et F' ont une infinité de perpendiculaires communes. Elles sont dites alors parallèles.

Deux lignes parallèles ne peuvent être coplanaires.

Par un pt qque on peut mener 2 parallèles à une droite.

Systèmes vecteurs; de la forme: $S = F \pm |F$.

Si une droite rencontre 2 parallèles, la somme des angles intérieurs est égale à 2 droits; et réciproquement.

Il y a des parallélogrammes dans l'espace elliptique qui seulement ils sont gauches.

Plans et lignes parallèles.

Chap. IV : Géométrie hyperbolique

Espace et Antispace. Une sous-région réelle peut être contenue tout entière dans l'antispace, mais non dans l'espace.

Un système normal se compose d'un seul point spatial e et de $(n-1)$ points antispatiaux.

Si une sous-région est spatiale, son supplément est antispatial.

Intensités des points et des plans.

Distance de points. Pour 2 points spatiaux x, y :

$$\cos \widehat{xy} = \frac{(x|y)}{\sqrt{(x|x)(y|y)}}$$

Distances de plans. Si la ligne PQ est spatiale :

$$\cos PQ = \frac{(P|Q)}{\sqrt{(P|P)(Q|Q)}}$$

Lignes spatiales et antispatiales.

Distances de sous-régions (analogues aux distances de plans)

Pôles et polaires.

Points de l'absolue : sont à une distance infinie de tout autre point.

Triangles. Spatiaux si les 3 sommets sont spatiaux ; les 3 sommets peuvent être antispatiaux et les 3 côtés spatiaux : on a alors un triangle semi-spatial.

Propriétés des angles d'un triangle spatial. Un tr. spatial ne peut avoir deux angles obtus. La somme de ses angles est inférieure à 2 droits.

Triangles stéréométriques.

Perpendiculaires, Points normaux : $(x|y) = 0$.
Distance d'un point à un plan ; entre sous-régions.
Figures rectilignes rectangulaires dans une région à 2 dimensions. Il n'y a pas de rectangle, car deux lignes n'ont pas deux perpendiculaires communes.
Construction du pentagone rectangulaire. Un côté s'exprime en fonction des deux côtés adjacents, car il est la polaire, par rapport à l'absolue, de leur point de intersection.
Le hexagone rectangulaire donne naissance à deux triangles conjugués par rapport à l'absolue
semi spatiaux
Lignes parallèles : qui se rencontrent sur l'absolue. Leur point de intersection est à distance infinie. Leur angle est nul.
Par un point on peut mener 2 parallèles à une droite.
Formule de l'angle de parallélisme.
On peut mener une parallèle à 2 droites qui se coupent.
Plans parallèles : dont l'intersection touche la quadrique absolue. Leur angle est nul.
Chap. V : Géométrie hyperbolique (suite) spatiale
Sphère. Centre spatial ou antispatial. Une sphère à centre antispatial est le lieu des points équidistants d'un plan spatial. Surfaces d'égale distance (1)
Une sphère spatiale est une surface fermée, et contient son centre, s'il est spatial, mais non s'il est antispatial.
Toute ligne spatiale menée par le centre antispatial, coupe la sphère en 2 points spatiaux.

(1) Le plan central est le plan polaire du centre antispatial.
(spatial)

Intersection des sphères. 2 plans radicaux, lieux des points d'où l'on peut mener des tangentes égales.
Surfaces-limites : Sphères dont le centre est sur l'absolu ; dont le rayon est infini. Rayons parallèles. Toutes les surfaces limites sont congruentes.
Grands cercles des sphères.
Un espace elliptique de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une sphère à centre spatial dans ~~l'~~ un espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions : les lignes droites deviennent des grands cercles.
Un espace hyperbolique de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une sphère à centre antispatial dans un espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions et de moindre constante spatiale.
Un espace euclidien de $(n-2)$ dimensions peut être conçu comme une surface-limite dans un espace hyperbolique de $(n-1)$ dimensions.
Surfaces d'égale distance à partir de sous-régions.
Pas de régions parallèles comme ds l'espace elliptique.
Intensités des forces : d'une force spatiale : $(-F|F)^{\frac{1}{2}}$; d'une force anti-spatiale : $(F|F)^{\frac{1}{2}}$.
Relations entre deux forces spatiales.
Systèmes de forces ; axe central.
Chap VI : Cinématique à trois dimensions.
Transformations congruentes : 1° laissent inaltérées les relations métriques internes et les intensités des points ; 2° transforment des points réels en points réels ;

3° équivalent à une autre transformation n fois répétée. — Ces transformations transforment l'Absolue en elle-même <u>directement</u>.

Dans l'espace hyperbolique, une transformation congruente d'axe a_1a_2 et de paramètres δ, α, équivaut à la translation d'axe a_1a_2 et de paramètre δ $(\alpha = 0)$ et à la rotation d'axe a_1a_2 et de paramètre α $(\delta = 0)$. — Dans la rotation les points de l'axe spatial restent immobiles; dans la translation, ce sont ceux de l'axe antispatial.

La rotation diffère de la translation en ce qu'elle repasse par la position primitive, tandis que dans la translation on s'en éloigne toujours.

<u>Le lieu des points d'égal déplacement</u> est une quadrique. Toutes ces quadriques touchent l'Absolue aux extrémités de l'axe a_1a_2.

<u>Suites équivalentes de transformations congruentes.</u>

<u>Deux déplacements infiniment petits</u> peuvent être intervertis sans changer le résultat.

N'importe quel déplacement inf. petit peut se décomposer en 3 translations et en 3 rotations suivant les 3 axes.

<u>Système de forces associé</u> à chaque transformation et la définissant complètement. La condition pour que la transformation soit une translation est: $\begin{cases} SS = 0. \\ S|S > 0, \end{cases}$ et une rotation: $\begin{cases} SS = 0. \\ S|S < 0. \end{cases}$

Une force spatiale représente une rotation autour de sa ligne; une force antispatiale représente une translation le long de sa ligne polaire.

Travail. Le travail de la force F dans la transformation S est : $-i(FS)$.

Si 2 systèmes sont réciproques : $SS' = 0$, le travail effectué par l'un dans la transformation symbolisée par l'autre est nul.

Lignes caractéristiques. Celle du p. x est xKx, celle du pl. P est PKP, Kx et KP étant les positions inf. voisines de x et de P dans la transformation congruente.

Espace elliptique. Pas de distinction entre les translations et les rotations : car les axes conjugués sont réels. Une translation relative à l'un est une rotation relative à l'autre, et de même paramètre.

Transformation vectorielle (Clifford) : dont les 2 paramètres sont égaux en val. abs. Tous les points sont déplacés de la même distance, tous les plans du même angle. C'est long de parallèles à l'axe.

Systèmes vecteurs associés de forces.

Transformations vectorielles successives (Rob. Ball.) Si l'on intervertit une transf. droite et une transf. gauche, le résultat ne change pas (suivant que les parallèles suivies sont droites ou gauches)

Chap. VII : Courbes et surfaces.

Dans l'espace elliptique polaire : $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$.

$x_1 = x + \dot{x}\, d\tau \qquad \dot{x} = \dot{\xi}_1 e_1 + \dot{\xi}_2 e_2 + \dot{\xi}_3 e_3 + \dot{\xi}_4 e_4$.

L'intensité de x reste égale à 1 dans le déplacement.

$\delta\sigma = xx_1$: $\qquad \frac{d\sigma}{d\tau} = \gamma\sqrt{(\dot{x}|\dot{x})}$

$\delta\varepsilon$ angle de contingence (entre xx_1 et x_1x_2)

$$\delta\varepsilon = \frac{\sqrt{x\dot{x}\ddot{x}|x\dot{x}\ddot{x}}}{(x\dot{x}|x\dot{x})}\,\delta\tau = \frac{\sqrt{x\dot{x}\ddot{x}|x\dot{x}\ddot{x}}}{\dot{x}|\dot{x}}\,\delta\tau$$

Tangente : $xx_1 = x\dot{x}$. Plan normal : $x|x\dot{x} = |\dot{x}$.

Ligne polaire : $|\dot{x}\ddot{x}$. Plan osculateur : $x\dot{x}\ddot{x}$.

angle de torsion : $\delta\theta = \frac{x\dot{x}\ddot{x}\dddot{x}\sqrt{\dot{x}|\dot{x}}}{x\dot{x}\ddot{x}|x\dot{x}\ddot{x}}\,\delta\tau$

Courbure : $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{x}|\dot{x}\ddot{x}) - (\dot{x}|\dot{x})^3}}{(\dot{x}|\dot{x})^{\frac{3}{2}}}$

Torsion : $\frac{1}{\kappa} = \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{x\dot{x}\ddot{x}\dddot{x}}{x\dot{x}\ddot{x}|x\dot{x}\ddot{x}}$

Le point de la ligne de striction de la développable polaire (enveloppe des plans normaux) qui correspond à $\underline{x}$ est $|x\ddot{x}\dddot{x}$ (point de contact de $|\dot{x}\ddot{x}$.)

Le centre de courbure est $x\dot{x}\ddot{x}|\dot{x}\ddot{x}$ (intersection de la ligne polaire et du plan osculateur)

Le rayon de courbure ρ n'est égal à l'inverse de la courbure que dans la Géométrie parabolique car on a : $\rho = \gamma \operatorname{tang} \frac{\rho'}{\gamma}$.

Normale principale : $x\dot{x}\ddot{x}|\dot{x}$.

Binormale : $x|x\dot{x}\ddot{x}$.

<u>Formules planaires</u> (tangentielles) en vertu de la dualité.

<u>Vitesse et accélération</u>. Le segment $x\dot{x}$ représente la vitesse en grandeur et en direction ; $x\ddot{x}$, l'accélération. La grandeur de la vitesse est $\dot{\sigma} = \gamma\sqrt{\dot{x}|\dot{x}}$.

L'accélération a deux composantes, une tangentielle, $\ddot{\sigma}$, l'autre suivant la normale principale, $\frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}$.
La grandeur est: $\gamma\sqrt{\ddot{x}\ddot{x}|x\ddot{x}}$.

Le Cercle. de rayon α, dans l'espace hyperbolique:

$\rho = \gamma \,\mathrm{tgh}\, \frac{\alpha}{\gamma}$ Courbure minima: $\frac{1}{\gamma}$, $\alpha = \infty$.

Si le cercle a son centre antispatial, il est à la distance β d'une droite. Alors: $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\beta}{\gamma}$

$\rho = \gamma$ pour $\beta = \infty$, $\rho = \infty$ pour $\beta = 0$.

Si le cercle a son centre sur l'Absolu (horicycle) on a: $\rho = \gamma$.

Mouvement d'un corps rigide. Translation, si $x\ddot{x} = 0$.

Coordonnées curvilignes de Gauss. sur une surface.

Courbure des surfaces. Expression de $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$.

Lignes de courbure. Théorème d'Euler: rayon de courbure d'une section normale qcq., ρ_1, ρ_2 étant ceux des sections normales principales: $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$.

Théorème de Meusnier. — Théorème de Dupin.

Surface-limite (horisphère): a les mêmes propriétés métriques que le plan euclidien.

Chap. VIII: Transition à la Géom. parabolique

Equation du plan de l'Absolu: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$.
Intensité du point $\Sigma\xi e$: $\Sigma\xi$.

Si l'on prend pour points de référence un p. qcque e et 3 p. du plan absolu, u_1 u_2 u_3, tout point a la forme $x = \xi e + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$
et son intensité est ξ (tous les p. du pl. abs. ont l'int. 0.)

La quadrique absolue dégénère en une conique dans le plan absolu, enveloppe de ses plans tangents. On admet que cette conique est imaginaire, pour avoir la mesure elliptique pour l'écartement des plans.

Si l'on prend pour forme initiale de la quadrique l'équation :

$$\Sigma \alpha \xi^2 = 0, \quad \text{(sans termes rectangles)}$$

il en résulte que les axes $eu_1\ eu_2\ eu_3$ sont orthogonaux.
La différence de 2 points d'intensité 1 est un p. à l'infini. On admet que son intensité est encore 1, ainsi que celle de $u_1\ u_2\ u_3$. Le point $e+u_1$ est le p. d'intensité 1 situé à la distance 1 de e sur eu_1. etc.

La distance entre 2 p. d'int. 1 : $e+\Sigma\xi u$, $e+\Sigma \eta u$ est :

$$\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}$$

Si : $x = e+\xi_1 u_1$, $\overline{ex} = \xi_1$; etc

L'angle θ des 2 plans $\lambda u_1 u_2 u_3 - \lambda_1 eu_2 u_3 + \lambda_2 eu_1 u_3 - \lambda_3 eu_1 u_2$

$\lambda' u_1 u_2 u_3 - \lambda'_1 eu_2 u_3 + \lambda'_2 eu_1 u_3 - \lambda'_3 eu_1 u_2$

est $$\cos\theta = \frac{\lambda_1\lambda'_1 + \lambda_2\lambda'_2 + \lambda_3\lambda'_3}{\sqrt{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)(\lambda_1'^2+\lambda_2'^2+\lambda_3'^2)}}$$

<u>Transformations congruentes.</u>

Dans toute transf. congruente, le plan de l'infini est <u>semi</u> latent, et il y a en outre une ligne semi latente dont le p. à l'infini est latent. Cette ligne est telle ; c'est l'<u>axe</u> de la transformation. Tous ses points sont déplacés sur elle de la même longueur γ ; tous les autres points tournent autour d'elle d'un angle δ (en avançant aussi de γ.)
Si γ est nul, il y a rotation ; si $\delta = 0$, translation.

Livre VII : Application du Calcul de l'extension à la Géométrie.

Chap. I : Vecteurs.

On va supposer connue la Géométrie métrique et lui appliquer le Calcul de l'extension.

Coordonnées tétraédriques (rapports de volumes)

Points à l'infini (d'intensité 0.) Loi spéciale d'intensité : le rapp. des intensités de $(z-x)$, $(z-y)$ est égal au rapport des distances xz, yz : on conviendra de prendre l'intensité égale à la distance.

Parallélogramme : $(b-a=d-c) < (a-c=b-d)$

$a+d=b+c$; les 2 diag. se bissectent.

Vecteurs (points à l'infini) direction avec longueur.

Somme : loi du parallélogramme.

En coordonnées Cartésiennes (e, u_1, u_2, u_3) tout vecteur a la forme : $\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$.

L'intensité d'un élément linéaire (prod de 2 points) est prop. à sa longueur. On admet qu'elle lui est égale (quand les 2 p. sont d'intensité 1.)

$ab = a(b-a)$ a, b, c étant en ligne droite on a : $(a-c)(b-a)=0$, $a(b-a)=c(b-a)$, d'où : $ab+bc+ca=0$, $ab+bc=ac$.

Ds un parallélogr. $ab+bc=2a\frac{b+c}{2}=ad$

Bivecteurs. Deux bivecteurs parallèles ne diffèrent que par l'intensité, prop. à leurs parallélogrammes. On convient qu'elle lui est égale (positive ou négative suivant le sens de la rotation.)

Les bivecteurs comme carrières. Ajouter un bivecteur à un segment qui lui est parallèle, c'est transporter celui-ci parallèlement à lui-même.
Forme générale d'un bivecteur: $\lambda_1 u_2 u_3 + \lambda_2 u_3 u_1 + \lambda_3 u_1 u_2$
Eléments plans. L'intensité d'un élément plan abc est prop. au triangle abc (rapporté au tr. $eu_1u_2 = e(e+u_1)(e+u_2)$) On convient de la considérer comme double de l'aire de ce tr. prise avec un signe.

$abc = a(b-a)(c-a)$

Un élément plan est le produit d'un bivecteur par un point, qui le fixe pour ainsi dire dans un plan déterminé.
Trivecteurs. Tous les trivecteurs sont des multiples numériques de l'un d'entre eux pris pour unité $(u_1u_2u_3)$
L'intensité d'un trivecteur peut être définie comme le volume de son parallélépipède.
Trivecteurs comme carrières. Ajouter un trivecteur à une aire, c'est déplacer celle-ci parallèlt à son plan.
Produit de quatre points. C'est une quantité numérique prop. au tétraèdre abcd. On la considère comme le volume du parallélépipède $a(b-a)(c-a)(d-a)$.
Tout produit nonvecteur est le produit d'un point d'intensité 1, et d'un vecteur dont l'intensité est égale.
Si V et V' sont 2 vecteurs, bivecteurs ou trivecteurs,

$aV = aV'$ entraîne $V = V'$.

Interprétation géométrique des formules:

$pq.rs = pqs.r - pqr.s = prs.q - qrs.p$

$pqr.st = pqrt.s - pqrs.t = pqst.r + rpst.q + qrst.p.$

$$abc.def = abcf.de + abce.fd + abcd.ef$$
$$= adef.bc + bdef.ca + cdef.ab.$$

Formules analogues pour les vecteurs.

Opération de prendre le vecteur. Multiplier un élément non-vecteur par le trivecteur-unité U, c'est le réduire à son facteur vecteur. Le produit d'un vecteur par U est nul. Le produit d'un point par U est son intensité.

$$ab.U = aU.b - bU.a = b - a$$
$$abc.U = aU.bc + bU.ca + cU.ab = bc + ca + ab.$$

Théorie des forces. Un système $S = au + M$ a pour vecteur principal $u = SU$, et pour moment vecteur M, par rapport au point de base a couple résultant

Statique graphique. Polygones funiculaires.

Chap. II : Vecteurs (suite)

Suppléments : $e_1 e_2 e_3 e_4$ forment un tétraèdre sui-conjugué par rapport à une quadrique sibinormale. Le centre est le pôle du plan de l'infini : soit e ; $u_1 u_2 u_3$ 3 vecteurs unités formant avec e un système normal (1). Si la quadrique est une sphère (réelle ou imaginaire) tous les systèmes normaux sont rectangulaires.

Si elle est imaginaire (rayon $\sqrt{-1}$), on a :

$$\cos\theta = \frac{(v|v')}{\sqrt{(v|v)(v'|v')}} \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{vv'|vv'}{(v|v)(v'|v')}}$$

On écrira : $u|u = u^2$; $M|M = M^2$.

Formules géométriques : $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2(u|v)$

---

(1) C.à.d. que eu_1, eu_2, eu_3 sont 3 diamètres conjugués.

Prendre le flux. Soit le vecteur : $v = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$.

$|ev = \xi_1 |eu_1 + \xi_2 |eu_2 + \xi_3 |eu_3 = \xi_1 u_2 u_3 + \xi_2 u_3 u_1 + \xi_3 u_1 u_2$

C'est le bivecteur perpendiculaire à v. Inversement, le vecteur perp au bivecteur M est $|eM$. L'opération $|e$ se représente par $\mathcal{F}$ et s'appelle : prendre le flux. Elle est indépendante de l'origine e.

$$|ev = -|v.\mathcal{U}. \qquad |eM = |M.\mathcal{U}$$

L'opération $\mathcal{F}$ revient, au signe près, à prendre le vecteur du supplément.

Flux-multiplication. $(v \mathcal{F} v) = (v|v)\,\mathcal{U}$.

$$(M \mathcal{F} M) = (M|M)\,\mathcal{U}.$$

Formules géométriques.

Axe central d'un système de forces.

Groupes doubles de syst de forces (propriétés métriques)

Le cylindroïde. Invariants harmoniques.

Groupes triples. Pôles et polaires invariants.

Petits déplacements d'un corps rigide. Équivalent à une translation et à une rotation.

Travail de la force F sur le p. x se déplaçant en $x + \lambda v$:

$$\lambda(F \mathcal{F} v) = W$$

Si le déplacement λv est produit par la transformation congruente λS : $W = \lambda(FS)$

indépendant du point où F est appliquée sur sa direction.

Travail d'un système S dans le petit déplacement $\lambda S'$:

$$W = \lambda(SS')$$

égal au travail du système S' dans le déplacement λS.

Si S et S' sont réciproques, $W = SS' = 0$.

Chap. III : Courbes et surfaces.

Point : $x = e + \Sigma_i \xi u$ ξ fonctions de τ.

Sa vitesse est le vecteur : $x' = \Sigma_i \xi' u$.

Son accélération : $x'' = \Sigma \xi'' u$.

Tangente à sa trajectoire : xx'.

Plan osculateur : $xx'x''$.

Binormale : $x \mathfrak{F} x'x''$.

Plan normal : $x \mathfrak{F} x'$.

Formules simplifiées : en supposant la vitesse uniforme, c. à d. en remplaçant $d\tau$ par $d\sigma$. $x' = 1$.

Normale principale : xx''.

$$\frac{1}{\rho^2} = (x''/x''), \quad \frac{1}{\rho^2 \kappa} = e x'x''x'''.$$

Polaire de x : $x \mathfrak{F} x'x'' + \mathfrak{F} x'$.

Centre de courbure : $x + \dfrac{x''}{(x'x'')^2} = x + \rho^2 x''$.

Centre de courbure sphérique :

$$x - \frac{\mathfrak{F} x'x''}{e x'x''x'''} = x - \rho^2 \kappa \, \mathfrak{F} x'x''.$$

Rayon de courbure sphérique : $\rho_1^2 = \rho^2 + \kappa^2 \left(\dfrac{d\rho}{d\sigma}\right)^2$.

Lieu du centre de courbure.

Coordonnées curvilignes de Gauss.

Courbure. Lignes de courbure.

Théorèmes de Dupin, d'Euler, de Meunier.

Chap. IV : Formules purement vectorielles.

Pour la Physique math., il est commode de supprimer les points et de ne considérer que les vecteurs. Ils forment un ensemble à 2 dimensions elliptique. Analogie avec la trigonométrie sphérique.

En rapportant tous les vecteurs à une même origine, on les fait correspondre à l'ensemble des points de l'espace

Notations: $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$$x_0 = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

De même pour les bivecteurs ou flux X.

Système de forces. Tout système de forces f appliquées aux p. x équivaut au vecteur Σf appliqué à l'origine, et au bivecteur $\Sigma x f$, moment du système par rapport à l'origine.

Cinématique. Soit u la vitesse d'un point, u' est son accélération: la direction du plan osculateur est ~~uu~~ le bivecteur uu'. La binormale est $|uu'$, le plan normal $|u$, etc.

Distribution continue d'une substance. En Physique on attache à chaque point de la matière une quantité scalaire (non dirigée) Ces quantités peuvent être assignées, soit au même point de l'espace occupé par divers points matériels, soit au même point matériel occupant ~~successivement~~ divers points de l'espace. Dans le 1er cas, ~~le cour~~ la quantité est fonction du temps et des coordonnées, qui ne sont pas elles-mêmes fonctions du temps, ce qui n'a pas lieu dans le 2e cas.

Opérateur différentiel de Hamilton:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$|\nabla u$ est le Curl du vecteur u, ∇u son Curl-flux.

Divergence de u: $\nabla|u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

∇ peut être traité comme un vecteur dans les calculs.

Si $\frac{\partial}{\partial t}$ est l'opérateur différentiel stationnaire, et $\frac{d}{dt}$ l'op. diff. mobile par rapport au temps, on a :

$$\frac{d\#}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{d}{d\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} + (u|\nabla)$$

u étant la vitesse de la matière au point x.

<u>Coordonnées polaires</u>.

<u>Coordonnées cylindriques</u>.

<u>Coordonnées curvilignes orthogonales</u>.

<u>Intégrales</u>. Théorèmes de Green et de Stokes :

$$\iiint (\nabla|u)\, dv = \iint u\, dS \qquad \iint \nabla u)\, dS = \int u|dx.$$

<u>Equations de l'Hydrodynamique</u> : u vitesse du fluide, ρ densité, p pression au point x, f force rapp. à la masse 1. Le curl $q = |\nabla u$ définit le mouvement tourbillonnaire en chaque point. Eq. fondamentale

$$\frac{d\rho u}{dt} = -\nabla p + \rho f$$

Si f dérive d'un potentiel φ : $\qquad f = -\nabla\varphi.$

$$\frac{du}{dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \varphi\right)$$

Equation de continuité : $\qquad \nabla|u = 0.$

<u>Origine mobile</u>. Un mouvement uniforme de l'origine ne change pas la forme des équations. Les tourbillons restent les mêmes quelque soit le mouvt. de l'origine.

<u>Potentiel vecteur de la vitesse</u>. On admet que les tourbillons n'existent que dans le fini.

Curl-filaments de force constante. Soit r le curl de V; les lignes tangentes en tout point à r sont les curl-lignes de V; l'ensemble des curl-lignes ~~issues~~ qui passent par un petit circuit fermé forment un curl-filament. Soit dS le bivecteur en ch. point, $r\,dS$ est la force du filament; et en vertu de la condition solénoïdale $r\,dS = C^{te}$

Fonctions charriées. Fonction q telle que toutes les surfaces $q = C^{te}$ soient occupées successivement par le même ensemble de particules matérielles.

— On a appliqué au Calcul de l'extension les méthodes inventées par Hamilton et Tait pour les Quaternions. Cf. J. W. Gibbs : Vector Analysis.

G. Peano: Saggio di Calcolo geometrico.
Turin, 1896.

Leibnitz, Möbius, Bellavitis, Grassmann, Hamilton.

Etant donnés 4 points A, B, C, D, on considère le tétraèdre ABCD avec un sens déterminé.

ABCD = 0 si les 4 points sont dans un plan.

Deux tétraèdres sont égaux quand ils ont même grandeur et même sens.

Un tétraèdre est considéré comme un produit:

$A(BCD)$, $(AB)(CD)$, $(ABC)D$.

Cette multiplication n'est pas commutative, mais elle a la propriété alternée: le produit change de signe à chaque inversion de 2 sommets.

Formes géométriques: du 1er degré:

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

Du 2e degré: $x_1 A_1 B_1 + \dots + x_n A_n B_n$

Du 3e degré: $x_1 A_1 B_1 C_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n$

Du 4e degré: $x_1 A_1 B_1 C_1 D_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n D_n$

$x_1\, x_2 \dots x_n$ sont des coefficients numériques réels.

Leur sens est déterminé par les formules (définitions):

$(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) BCD = x_1 A_1 BCD + \dots + x_n A_n BCD$.

$(x_1 A_1 B_1 + \dots + x_n A_n B_n) CD = x_1 A_1 B_1 CD + \dots + x_n A_n B_n CD$.

$(x_1 A_1 B_1 C_1 + \dots + x_n A_n B_n C_n) D = x_1 A_1 B_1 C_1 D + \dots + x_n A_n B_n C_n D$.

Une forme de degré $(4-k)$ est nulle, si son produit par k points quelconques est nul.

Deux formes de degré $(4-k)$ sont égales, si leurs produits par k points quelconques sont égaux $(k = 1, 2, 3)$

Si l'on considère les coefficients x comme les masses des points correspondants, deux formes du 1er degré sont égales quand elles ont le même moment par rapport à un plan quelconque (Calcul barycentrique).
Deux formes du 2e degré sont égales quand elles ont même moment par rapport à un axe quelconque (Théorie des forces appliquées à un corps rigide.)
On appelle ligne le produit de 2 points : AB ;
triangle le produit de 3 points : ABC
Deux lignes sont égales quand elles sont sur la même droite, ont la même longueur et le même sens.
Deux triangles sont égaux quand ils sont dans le même plan, ont la même grandeur et le même sens.
Somme et produit de deux formes de même degré.
L'addition et la multiplication des formes ont toutes les propriétés des opérations arithmétiques (sauf la commutativité de la multiplication(1)) de sorte que l'on peut leur appliquer le calcul algébrique.
Les vecteurs sont des formes du 1er degré, de la forme

$$B-A.$$

Deux vecteurs sont égaux quand ils sont parallèles, de même longueur et de même sens.
La somme d'un point et d'un vecteur est un point :
Si $B-A=V$, $\qquad A+V=B$.
Somme de 2 vecteurs : $(A+V_1+V_2)-A = V_1+V_2$.
Avantage de la notation de Grassmann $(B-A)$ sur celle de Bellavitis et d'Hamilton (AB) : réduction immédiate au calcul algébrique. Par ex la formule de Möbius :

(1) et les 2 formules : $AB=-BA$ $\qquad AA=0$.

$$AB + BC + CA = 0$$

s'écrit : $(B-A) + (C-B) + (A-C) = 0.$

ce qui est une identité algébrique. Les équipollences de Bellavitis deviennent des égalités algébriques.

— Formes du 2e et du 3e degré.

Toute ligne est le produit d'un point par un vecteur :

$$A(B-A) = AB \qquad (AA = 0)$$

Le vecteur d'une ligne AB est $B-A$

Le produit de 2 vecteurs est un bivecteur, forme du 2e degré correspondant au couple en Mécanique

Toute forme du 2e degré est réductible à la somme d'une ligne et d'un bivecteur.

Le produit de 3 vecteurs est un trivecteur (forme du 3e degré)

Toute forme du 3e degré est réductible à un triangle ou à un trivecteur

Coordonnées. Soient $A_1 A_2 A_3 A_4$ 4 formes du 1er degré dont le produit n'est pas nul (4 points non dans un même plan)

Toute forme du 1er degré se mettra sous la forme :

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

Toute forme du 2e degré, à la forme :

$$y_{12} A_1 A_2 + y_{13} A_1 A_3 + \dots + y_{34} A_3 A_4$$

Toute forme du 3e degré, à la forme :

$$z_1 A_1 A_2 A_3 - z_2 A_1 A_3 A_4 + z_3 A_1 A_2 A_4 - z_4 A_1 A_2 A_3.$$

Les coefficients x, y, z sont les coordonnées des formes par rapport aux formes de référence $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Le volume du tétraèdre déterminé par les 4 points dont les coordonnées sont: $(x_1 \dots x_4)$ $(y_1 \dots y_4)$ $(z_1 \dots z_4)$ $(t_1 \dots t_4)$

est:
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \quad A_1 A_2 A_3 A_4.$$

D'où relation avec la théorie des déterminants.

Cas des coordonnées cartésiennes: les 4 éléments de référence sont le point-origine O, et 3 vecteurs non complanaires I, J, K.

Si les 4 éléments de référence sont 4 points, on a le système de coordonnées barycentriques.

Une forme du 1er degré détermine en général un point;
——— 2e ——— une droite;
——— 3e ——— un plan.

Produits régressifs. Le produit d'une forme du 2e et d'une forme du 3e degré est une forme du 1er degré (point d'intersection de la droite et du plan correspondants) (2+3−4=
De même le produit de 2 formes du 3e degré (plans) est une forme du 2e degré (droite); de 3 formes du 3e degré, une forme du 1er degré (point) [3+3−4=2; 3+3+3−8=1]

Cette méthode permet d'exprimer les projections et sections.

Opération ω sur les formes

Si s est du 1er degré, ωs = la masse (somme des coefficients)

Si s est du 2e degré, ωs = le vecteur de s:
$$\omega(AB) = B - A.$$

Si s est du 3e degré, ωs = le bivecteur de s:
$$\omega(ABC) = (B-A)(C-A) = BC + CA + AB.$$

Si s est du 4e degré, ωs = le trivecteur de s:
$$\omega(ABCD) = BCD - ACD + ABD - ABC.$$

Module d'un vecteur : sa longueur

" d'un bivecteur : l'aire du parallélogramme

" d'un trivecteur : le volume du parallélépipède pris avec le signe relatif au sens.

On appelle indice du bivecteur IJ le vecteur K perpendiculaire à IJ, de sens tel que IJK soit positif, et d'un module égal à celui de IJ.

Réciproquement ~~L'indice du vecteur K est~~ le bivecteur IJ est l'indice de K : $K = |IJ$ $\quad IJ = |K$.

Si un bivecteur représente un couple de forces, son indice représente son moment.

Les opérations ω et $|$ sont distributives

Théorème : $I|I = (\text{mod } I)^2$

On peut écrire : $I|I = I^2$ (puisque $II = 0$.)

$$\text{Sinus}(I, J) = \frac{\text{mod}(IJ)}{\text{mod } I \text{ mod } J}$$

~~Même formule pour~~ Si I est un vecteur et j un bivecteur,

$$\text{Sinus}(I, j) = \frac{Ij}{\text{mod } I \text{ mod } j}$$

$$\text{Cos}(I, J) = \frac{I|J}{\text{mod } I \text{ mod } J}$$

Grassmann appelle le bivecteur IJ le produit externe des 2 vecteurs I, J, et $I|J$ leur produit interne. (produit de I par l'indice de J) Le produit interne représente le travail de la force I dans le déplacement J.

Application à la Géométrie cartésienne

Soient I, J, K 3 vecteurs orthogonaux, de longueur 1, et tels que : $IJK = +1$.

On a $I/I = J/J = K/K = 1$,

$$I/J = J/K = K/I = 0,$$

$$/JK = I, \quad /KI = J, \quad /IJ = K.$$

Un vecteur V de coord x, y, z, a pour expression

$$V = xI + yJ + zK$$

$$V/V = (\text{mod} V)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Pour que le point: $P = O + xI + yJ + zK$

soit dans le plan: $\pi = aOJK - bOIK + cOIJ - dIJK$

il faut et il suffit que: $P\pi = 0$

c.à.d: $ax + by + cz + d = 0$.

La méthode de Grassmann n'exclut pas la Géométrie analytique; elle sert à retrouver les formules, et à les interpréter.

<u>Géométrie infinitésimale</u> Une forme variable du 1er degré S a pour limite S_0 si, quels que soient les points PQR, on a

$$\lim SPQR = S_0 PQR.$$

Si une forme est fonction d'une variable numérique t, on pose:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{h=0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

La formule de Taylor s'applique aux formes variables.

Si P est un point fonction de la variable réelle t, ses dérivées seront des vecteurs P', P'',.... La tangente à la courbe décrite par le point P est la ligne PP'; le plan osculateur est le plan $PP'P''$.

Si P est fonction de 2 variables u, v, le plan tangent à la surface décrite par P est $P.\frac{\partial P}{\partial u}.\frac{\partial P}{\partial v}$.

Cf Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H Grassmann Turin, 1888.

G. Peano: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, 1888)

Introduction: *Opérations de la Logique déductive*.

Notations: $<$: inclusion entre des classes. 9 axiomes.

Formules de développement de Boole.

Propositions: catégoriques, conditionnelles: celles-ci contenant une ou plusieurs indéterminées.

Notation: $x : \alpha$ = l'ensemble des x qui vérifient α.

En supprimant $x :$, on obtient des formules entre propositions *conditionnelles*, analogues aux formules entre classes.

Opérations sur les propositions: add. mult. membre à membre; négation des 2 membres (contraposition)

$$(A < B) = (A = AB) = (A + B = B)$$

$$(A < B) = (AB' = 0) = (A' + B = 1)$$

Traduction des 4 prop. classiques: A, E, I, O:

$$AB' = 0, \quad AB = 0, \quad AB \neq 0, \quad AB' \neq 0.$$

Conversion de E et I. Contradictoires, contraires.

Conversion (conditionnelle) de A.

Syllogisme: formules générales: *Barbara*, *Disamis*.

Formes défectueuses: *Darapti*.

Résolution de l'éq. à 1 inconnue. Élimination (1)

Vérification de la fausseté de *Darapti* par élimination

---

(1) Application au syllogisme.

Chap. I : Formes géométriques.

Segment AB, triangle ABC, volume ABCD.
Opérations sur les volumes. Grandeur d'un volume. Sens d'un volume. Volume nul. Rapport de 2 volumes. Égalité, somme, mult^on par un nombre.
Formes : Définition de leur égalité par l'égalité des volumes correspondants.

$mA = nB$ signifie que les pts A et B coïncident et que $m = n$

$a = b$ signifie que les 2 segments ~~a et b~~ sont ~~dans~~ sur la même ligne, ont même grandeur et même sens.

$\alpha = \beta$ signifie que les 2 tr. α et β sont dans le même plan, ont même grandeur et même sens.

Opérations sur les formes. Addition. Mult^on par un nombre. Deux volumes ont toujours un rapport (même ligne); deux tr. n'en ont que s'ils sont dans le même plan; deux segments n'en ont que s'ils sont sur la même ligne.

Produit progressif (forme projetante de S par S'):

$$S = \Sigma m_i A_i \qquad S' = \Sigma m'_j A'_j \qquad SS' = \Sigma\Sigma m_i m'_j A_i A'_j$$

$$SS' = (-1)^{ss'} S'S \qquad (S \text{ d'ordre } s, \ S' \text{ d'ordre } s')$$

Chap. II. Formes du premier ordre (Calcul barycentrique de Möbius)

$$(ABC = 0) = (AB + BC + CA = 0)$$

$$(ABCD = 0) = (ABC - ABD + ACD - BCD = 0)$$

Démonstrations par l'intuition.

Théorème : $mA + nB = (m+n)C$.

<u>Masse d'une forme du 1er ordre.</u> <u>Centre de gravité.</u>

Toute forme du 1[er] ordre dont la masse est nulle est réductible à un <u>vecteur</u> : $P - Q$.

Égalité des vecteurs.

<u>Problèmes sur la réduction des formes du 1[er] ordre</u>

Toute forme du 1[er] ordre peut se réduire à un point (arbitraire) (ayant pour masse la masse de la forme) et à un vecteur.

Deux vecteurs parallèles : $IJ = 0$.

A, B, C étant en ligne droite, on a :

$(B-A)(C-A) = 0$, ou : $A(B-A) = C(B-A)$

ou : $AB = C(B-A)$, $AB + BC + CA = 0$.

I, J, K étant 3 vecteurs parallèles à un même plan

on a : $K = xI + yJ$ $\quad IJK = 0$. $(IJ \neq 0)$

A, B, C, P étant 4 points d'un plan $(ABC \neq 0)$,

on a : $P = xA + yB + zC$

et : $ABC = (AB + BC + CA)P$.

I, J, K, V étant 4 vecteurs de l'espace $(IJK \neq 0)$,

on a : $V = xI + yJ + zK$

et : $IJKV = 0$.

A, B, C, D, P étant 5 points de l'espace $(ABCD \neq 0)$

on a : $P = xA + yB + zC + tD$,

et : $ABCD = (ABC - ABD + ACD - BCD)P$.

Relation entre 5 points qcques de l'espace.

Chap. III : Formes du second ordre.

Le segment AB a pour vecteur : $B - A$.

La somme de plusieurs segments d'un même plan, quand la somme de leurs vecteurs n'est pas nulle, se réduit à un segment dont le vecteur est la somme de leurs vecteurs ; quand la somme des vecteurs est nulle, se réduit à la somme de 2 segments égaux et opposés.

Polygones funiculaires (Statique graphique)

La somme de plusieurs segments parallèles se réduit, si la somme des vecteurs n'est pas nulle, à un segment ~~dont le~~ ayant pour vecteur cette somme et pour origine le centre de gravité des origines des segments donnés ; si la somme des vecteurs est nulle, à la somme de deux segments égaux et contraires.

Un couple de vecteurs $(A - B) J$ équivaut au produit de 2 vecteurs ou bivecteur IJ.

Un bivecteur équivaut à la somme des côtés d'un triangle.

$$IJ = (B - A)(C - A) = BC + CA + AB.$$

La somme de plusieurs segments dans l'espace se réduit en général à un segment et à un bivecteur ; ~~et~~ à un bivecteur seul, si la somme des vecteurs est 0 ; et à un segment seul, si $SS = 0$, c. à d. $av = 0$.

Elle est toujours réductible à la somme de 2 segments.

Propriétés des bissectrices du triangle, du quadrilatère complet.

Chap. IV : Formes du troisième ordre.

Un triangle ABC a pour bivecteur AB + BC + CA.
Si la somme des bivecteurs de plusieurs triangles est nulle, la somme de ces triangles se réduit à deux triangles ayant des bivecteurs égaux et contraires (sinon, à un seul triangle.)
La somme de 2 bivecteurs égaux et contraires est un produit de 3 vecteurs, ou trivecteur

$$IJK = (B-A)(C-A)(D-A) = BCD - ACD + ABD - ABC.$$

$$P(BCD - ACD + ABD - ABC) = ABCD$$

Le produit d'un point par un trivecteur donne un volume indépendant de la position de ce point.
Propriétés projectives du tétraèdre

Chap. V : Formes sur une droite.

Entre 3 formes du 1er ordre sur une droite on a :

$$AB.C + BC.A + CA.B = 0.$$

En effet, entre 3 points non coïncidants on a

$$C = xA + yB \qquad CB = xAB, \quad AC = yAB.$$

d'où : $AB.C = CB.A + AC.B$.

Ou encore : $AB.C = AC.B - BC.A$

d'où : $AB.CD = AC.BD - BC.AD$

Coordonnées d'une forme C par rapport à 2 formes de référence A et B : les coefficients x et y.
Coordonnée cartésienne : les formes de référence sont le point O (origine) et le vecteur-unité V.

Rapport anharmonique.
Pour 4 points harmoniques, on a la relation :

$$AC.BD + BC.AD = 0$$

Pour avoir le conj. harmonique des 3 p. A, B, C, il suffit de prendre : $D = AC.B + BC.A$
AC, BC sont des facteurs numériques.

Chap. VI : Formes dans un plan

Tout vecteur K du plan peut se mettre sous la forme :

$$K = xI + yJ \qquad (IJ \neq 0)\ (IJ = u)$$

Identité : $IJ.KL = IK.JL - JK.IL$

ou : $(xI + yJ)(x'I + y'J) = (xy' - x'y)\,IJ$

Bivecteur unité ; I et J de longueur 1, perpendiculaires, et POIJ positif (dextrorsum.) Surface unité : OIJ.

Définition : $|V$ est un vecteur égal et perpendic à V, dans un sens tel que $V|V$ soit positif.

$||V = -V \qquad |U|V = UV. \qquad U|V = V|U.$

Pour tout vecteur, on a : $U = \mathrm{mod}\,U \times K$
K étant de longueur 1. $|U = \mathrm{mod}\,U \times |K$

$U|U = \mathrm{mod}^2 U \qquad$ ($K|K$ est le bivecteur-unité)

Condition de perpendicularité : $U|V = 0$.

Définitions : $\sin(U, V) = \dfrac{UV}{\mathrm{mod}\,U\,\mathrm{mod}\,V}$

$\cos(U, V) = \sin(U, |V) = \dfrac{U|V}{\mathrm{mod}\,U\,\mathrm{mod}\,V}$

Identité : $UV \times U'V' = \begin{vmatrix} UU' & UV' \\ VU' & VV' \end{vmatrix}$

donne : $\sin(U,V)\sin(U',V') = \sin(U',U')\sin(V,V') - \sin(V,U')\sin(V,V')$

d'où :

$$\sin(U,V) = \sin(U,W)\cos(V,W) - \cos(U,W)\sin(V,W)$$
$$\cos(U,V) = \sin(U,W)\sin(V,W) + \cos(U,W)\cos(V,W)$$

Si l'on a : $U = xI + yJ$, $V = x'I + y'J$,

on trouve. $UV = xy' - x'y$.

$U|V = xx' + yy'$.

$$\sin(U,V) = \frac{xy' - x'y}{\mathrm{mod}\,U\,\mathrm{mod}\,V} \qquad \mathrm{mod}\,U = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\cos(U,V) = \frac{xx' + yy'}{\mathrm{mod}\,U\,\mathrm{mod}\,V}$$

Entre 4 formes du 1er ordre A, B, C, D, on a :

$$BCD.A - ACD.B + ABD.C - ABC.D = 0.$$

ou : $ABC.D = BCD.A + CAD.B + ABD.C$

ou : $ACD.B - BCD.A = ABD.C - ABC.D$

Définition : $AB.CD = ACD.B - BCD.A$.

$AB.CD$ est le produit régressif ou l'intersection de AB et CD. — En particulier on a :

$AB.AC = ABC.A$, $AB.BC = ABC.B$, $AC.BC = ABC.C$.

Le produit de 2 segments p, q est une forme du 1er ordre qui appartient à la fois aux 2 lignes ;

$$pq = -qp.$$

pq est nul, soit quand l'un des facteurs est nul, soit quand les 2 segments sont sur la même droite, soit quand ce sont 2 bivecteurs.

On a l'identité : $ab.P = aP.b - bP.a$:

$abc = 0$ exprime que les 3 ~~droits~~ formes du 2e ordre a, b, c ont un élément commun.

uab est la masse de la forme ab : $\mathrm{mod}\,a\,\mathrm{mod}\,b\,\sin(a, b)$

— $A_1 A_2 A_3$ étant 3 formes du 1er ordre ($A_1 A_2 A_3 \neq 0$), toute forme du 1er ordre peut se mettre sous la forme :

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

et toute forme du 2e ordre sous la forme :

$$u_1 A_2 A_3 + u_2 A_3 A_1 + u_3 A_1 A_2$$

On pose : $a_1 = A_2 A_3$, $a_2 = A_3 A_1$, $a_3 = A_1 A_2$.

$$\theta = a_1 a_2 a_3.$$

En prenant pour éléments de référence un point O, et 2 vecteurs I et J perpendiculaires ($J = |I$), tout point peut s'écrire : $A = O + xI + yJ$

toute forme du 2e ordre : $a = pJO + qOI + ru$

$au = qI - pJ$ (vecteur de a.)

$\mathrm{mod}\,a = \mathrm{mod}(au) = \sqrt{p^2+q^2}$

$Aa = px + qy + r$

C'est l'aire du triangle Aa. La distance de A à a est : $\dfrac{Aa}{\mathrm{mod}\,a} = \dfrac{px+qy+r}{\sqrt{p^2+q^2}}$

Condition pour que A soit sur a : $px + qy + r = 0$.

Intersection de 2 lignes.

$$AA' = (pq' - p'q)O + (qr' - q'r)I + (rp' - pr')J$$

Ses coordonnées cartésiennes sont : $\dfrac{qr'-q'r}{pq'-p'q}$, $\dfrac{rp'-r'p}{pq'-p'q}$

Si $pq' - p'q = 0$, c'est un vecteur car les 2 lignes sont alors parallèles.

Rapport anharmonique de 4 vecteurs dans un plan: $\frac{IK}{JK} : \frac{IL}{JL}$

Vecteurs harmoniques: $I, J, xI+yJ, xI-yJ$.

ou bien: $I, J, K, IK.J + JK.I$.

En posant $V|V = (\mathrm{mod}\, V)^2 = V^2$, on a

$(V \pm V)^2 = V^2 + V^2 \pm 2V|V$,

$(V+V)|(V-V) = V^2 - V^2$.

$(A-B)|(C-D) + (B-C)|(A-D) + (C-A)|(B-D) = 0$.

On a les identités suivantes:

$(bc.b'c')(ca.c'a')(ab.a'b') = abc.a'b'c'.(aa'.bb'.cc')$

(où a, b, c, a', b', c' représentent, soit les sommets, soit les côtés des 2 tr.) qui expriment le <u>théorème de Desargues</u> sur les triangles homologiques.

Equation d'une conique: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$,

A, B, C étant des points non collinéaires, x, y des nombres.

Tangente au point (x, y): $ABx^2 + 2ACxy + BCy^2$.

Condition pour que le point P appartienne à la courbe

$(PCA)^2 - (PBC)(PAB) = 0$.

Relation entre 6 points d'une conique:

$(AB.DE)(BC.EF)(CD.FA) = 0$.

Equation tangentielle d'une courbe comme <u>enveloppe</u> d'une droite.

Quadrilatère complet $ABCD$; si l'on pose:

$X = AB.CD, \quad Y = BC.AD, \quad Z = CA.BD$,

$x = YZ, \quad y = ZX, \quad z = XY$,

on peut construire par proj. et sect. tous les points de la forme

$mX + nY + pZ_1$ et toutes les droites de la forme
$mx + nY + pZ_1$, m, n, p ét. des n rationnels.

Chap. VII : Formes dans l'espace

Relation entre 4 vecteurs quelconques :

$$IJK.U = UJK.I + UKI.J + UIJ.K$$

$$UV = (yz' - y'z)JK + (zx' - z'x)KI + (xy' - x'y)IJ.$$

$$UVW = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z'' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} IJK.$$

Produit régressif (intersection) de 2 bivecteurs :

$$UV.U'V' = UU'V'.V - VU'V'.U$$
$$= UVV'.U' - UVU'.V'$$

u, v, w étant des bivecteurs, on a :

$uv = -vu$, $\quad uv.w = u.vw$

$UV.u = Uu.V - Vu.U$ $\quad uv.U = uU.v - vU.u$.

Trivecteur-unité : I, J, K orthogonaux, de long. 1 ; le volume du tétraèdre $OIJK$ étant positif (dextrorsum).

Définition de l'indice : $U = |u$, $\quad u = |U$ quand le vecteur U et le bivecteur u sont normaux, de même grandeur et que leur produit est positif.

Le produit $U|V$ dans l'espace équivaut au produit $U|V$ dans le plan UV, comme on le montre en prenant un vecteur auxiliaire $I = |(UV)$. $\quad |X = \perp(X)I$.

$|(U+V) = |U + |V$ $\quad |(UV) = |U|V$ $\quad U|V = V|U$.

Si $\mathrm{mod}\, I = 1$, $\quad I|I = 1$ (trivecteur-unité)

En gén. : $U|U = (\mathrm{mod}\, U)^2$ $\quad u|u = (\mathrm{mod}\, u)^2$.

Définitions : $\sin(I,J) = \mathrm{mod}(IJ)$

$\sin(I,i) = Ii$, $\quad \sin(i,j) = \mathrm{mod}(ij)$.

$\cos(I,J) = I|J$,

$\cos(I,i) = \mathrm{mod}(I|i)$, $\cos(i,j) = i|j$.

I, i, j étant de grandeur 1.

$$IJ \times ij = \begin{vmatrix} Ii & Ij \\ Jj & Jj \end{vmatrix}$$

$$\sin(I,J)\sin(K,L_1)\cos(IJ,KL_1) = \cos(I,K)\cos(J,L_1) - \cos(I,L_1)\cos(J,K)$$

d'où $(I_1 = I)$:

$$\cos(J,K) = \cos(I,J)\cos(I,K) + \sin(I,J)\sin(I,K)\cos(IJ,IK)$$

formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

Vecteurs de référence : I, J, K ;

$i = JK$, $\quad j = KI$, $\quad k = IJ$.

$I = jk$, $\quad J = ki$, $\quad K = ij$.

$|I = i$, $\quad |J = j$, $\quad |K = k$ (et vice versa)

$I|I = J|J = K|K = IJK = 1$

$I|J = I|K = J|K = 0$.

$\mathrm{mod}(xI + yJ + zK) = \mathrm{mod}(xi + yj + zk) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Intersections. Relation entre 5 ~~points~~ formes de 1er ordre quelconques :

$BCDE.A - ACDE.B + ABDE.C - ABCE.D + ABCD.E = 0$.

Définitions : $AB.PQR = APQR.B - BPQR.A$

$= ABQR.P + ABRP.Q + ABPQ.R$

$ABC.PQR = APQR.BC + BPQR.CA + CPQR.AB$

Si α, β, γ sont des formes du 3e ordre, on a :

$\alpha\beta = -\beta\alpha$.

On a encore pour les produits régressifs la formule

$$SS' = (-1)^{ss'} S'S \quad (s, s' \text{ ordres de } S, S')$$

Soit X un élément d'ordre $s+s'-4$ commun à S et S', tel que $XP = S$, $XQ = S'$, on aura: $SS' = XPQ.X$

Coordonnées. Si $A_1 A_2 A_3 A_4 \neq 0$, toutes les formes peuvent s'exprimer en fonction linéaire de A_1, A_2, A_3, A_4, et de leurs produits doubles triples et quadruple, et leurs coefficients sont complètement déterminés.

Le produit d'une forme du 1er ordre par le trivecteur unité ω est sa masse; du 2e ordre, son vecteur; du 3e ordre, son bivecteur; du 4e ordre, son trivecteur.

Coordonnées cartésiennes: Éléments de référence: O, I, J, K $\quad IJK = \omega$; $\quad OIJK = \Omega$ (vol. unité)

Tout point est de la forme: $A = mO + xI + yJ + zK$

m est sa masse; x, y, z, ses coordonnées cartésiennes. Pour $m = 0$, on a un vecteur (point à l'infini)

Toute forme du 2e ordre est de la forme:

$$a = pOI + qOJ + rOK + p'i + q'j + r'k$$
$$a\omega = pI + qJ + rK$$

Toute forme du 3e ordre est de la forme

$$\alpha = sOi + tOj + uOk + v\omega$$
$$\alpha\omega = si + tj + uk$$

Propriétés du trièdre. Si l'on pose $\sin(I, J, K) = IJK$

I, J, K de grandeur 1.

bivecteurs

le sinus d'un angle trièdre est le produit du sinus d'un de ses dièdres par le sinus de l'angle que son arête fait avec la face opposée.

Un trigone composé de 3 vecteurs I, J, K de longueur 1; on pose sin(I, J, K) = IJK.

Le sinus d'un trigone est égal au sinus d'une face par le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'arête opposée.

Bissectrices des faces: $I \pm J$, $I \pm K$, $J \pm K$.

Plans bissecteurs des dièdres: $i \pm j$, $i \pm k$, $j \pm k$.

Récapitulation de formules.

Définition des fonctions homogènes entières.

Une fonction homogène entière d'une forme du 1er ordre définit un lieu géom. (~~courbe~~ surface);

d'une forme du 2e ordre, un complexe linéaire;

d'une forme du 3e ordre, une enveloppe de plans.

Chap. VIII. Dérivées.

Définition des limites: limite d'un volume; puis limite d'une forme d'ordre quelconque.

Dérivée: $A'(t) = \lim \frac{1}{h} \left[A(t+h) - A(t) \right]$

$$d(AB) = dA.B + A.dB.$$

La dérivée d'ordre n a pour coordonnées les dérivées d'ordre n des coordonnées de la forme primitive.

$$\lim_{t_1, t_2 = t} \frac{A(t_1) A(t_2)}{t_2 - t_1} = A(t) A'(t)$$

Théorème de Taylor. Déf. des moyennes

$$\lim_{t_1 t_2 t_3 = t} \frac{A(t_1)A(t_2)A(t_3)}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)} = \frac{1}{2} A(t) A'(t) A''(t)$$

$$\lim_{t_1 t_2 t_3 t_4 = t} \frac{A(t_1)A(t_2)A(t_3)A(t_4)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_4-t_2)(t_4-t_3)} =$$

$$\frac{1}{2.3} A(t) A'(t) A''(t) A'''(t)$$

Se démontre au moyen des fonctions interpolaires :

$$A(t_1 t_2) = \frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad A(t_1 t_2 t_3) = \frac{A(t_1 t_3) - A(t_1 t_2)}{t_3 - t_2}, \ldots$$

Définition de l'intégrale indéfinie.

Si : $A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots$ $A_1 A_2 \ldots$ élém. fixes,

$$\int A dt = A_1 \int x_1 dt + A_2 \int x_2 dt + \ldots$$

Le reste de Taylor peut se mettre sous la forme :

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n A^{(n+1)}(t+zh)\, dz$$

Si $A(t)$ est un point, t le temps, ~~$A(t)$~~ ses dérivées sont des vecteurs. $A'(t)$ est sa vitesse (ou sa quantité de mouvement) $A''(t)$ son accélération (sa force). AA' est la tangente à la courbe au point t, $AA'A''$ le plan osculateur.

Si A se meut dans un plan, $A|A'$ est la normale. Dans l'espace, $A|A'$ est le plan normal ; la binormale est $A|A'A''$. La normale principale est $A(A'A''|A') = (A'|A')AA'' - (A'|A'')AA'$.

$\int$ ~~A~~$(\text{mod } A')\, dt = \int \text{mod}\, dA$ est la longueur de l'arc.

Si $a(t)$ est une droite mobile dans un plan, aa' est le point d'inters. de 2 pos. inf. voisines, c.à.d. le p. de contact

avec la courbe enveloppe. La normale à la courbe est : aa'/ua.

Dans l'espace, la droite $a(t)$ engendre une surface réglée. Le plan Pa' est le pl tang. à la surf au p. P ; le point $\pi a'$ est le p de contact du plan π passant par a.

Si $\alpha(t)$ est une forme du 3e ordre, si $\alpha\alpha'\alpha''\omega \neq 0$, le p. $\alpha\alpha'\alpha''$ est le p. d'intersect. des 3 plans inf. voisins α. Si $\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' \neq 0$, le p. $\alpha\alpha'\alpha''$ décrit une courbe, dont la tang. est $\alpha\alpha'$ et le plan osculateur α.

Si $A(u,v)$ est un p. fonction de 2 paramètres il engendre une surface ; le plan tang. est $A\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}$; la normale est : $A/\left(\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial A}{\partial v}\right)$

Chap. IX : Transformations de systèmes linéaires.

Un système linéaire est un ensemble où l'on a défini :

1° L'égalité, comme relation symétrique et transitive ;

2° L'addition, comme opération univoque, commutative et associative ;

3° La multiplication par un nombre ~~entier~~ réel ;

4° Un être nul, tel que : $0x = 0$, $x + 0 = a$

Il en résulte que toute fonction linéaire homogène : $ma + nb + pc + \ldots$ représente un être du système.

Le nombre des dimensions d'un système linéaire est le nombre maximum d'êtres indépendants entre eux qu'on peut prendre dans le système.

(Sont dépendants les êtres entre lesquels existe une relation linéaire)

Coordonnées. Limite. Dérivée. Intégrale.

Une opération distributive qu'on peut effectuer sur tout être du système (et qui donne un être d'un système linéaire) est une transformation (linéaire)

Si le résultat d'une transformation appartient au même système, c'est une substitution.

Le résultat Ra est considéré comme un produit (1)

On pose: $R = S$, si quel que soit x on a: $Rx = Sx$

$(R+S)a = Ra + Sa \qquad SRa = S(Ra)$

Les diverses transformations d'un syst linéaire en un autre forment elles-mêmes un système linéaire

La multiplication des transformations est associative et distributive, mais non commutative (en général)

Il y a une et une seule transf. linéaire qui à n éléments indépendants du syst A fait corresp. n éléments d'un autre syst. B. On l'écrit: $R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

Propriétés analogues à celles des fractions.

Si $b_1 b_2 \dots b_n$ sont aussi indépendants, on a la transf inverse: $R^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$

Définition des puissances de R

Dérivée de $f(x)$ par rapport à la différentielle x':

$$\left(d\,\frac{x'}{x}\right) f(x) = \lim \frac{1}{h}\left[f(x+hx') - f(x)\right]$$

C'est une fonction distributive par rapport à x'.

— Considérations sur l'égalité et l'identité: toute égalité peut se réduire à une identité (par abstraction.)

Homographie, involution, } considérées comme substitutions.
translation, rotation }

---

(1) La multiplication arithmétique est une transformation.

Georg Cantor : Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, trad. Marotte (Math. Annalen, t. 46 et 49) Hermann 1899.
(Extr. des Mém. de la Soc. des Sc. phys et nat. Bordeaux)
C'est une théorie des nombres cardinaux et ordinaux appuyée sur une théorie des ensembles et des types d'ordre (par suite, à base concrète et réelle.)
§ 1. Notion de puissance ou de nombre cardinal fondée sur l'équivalence de 2 ens. coordonnés.
§ 2. Comparaison des puissances.
Soient $a = \overline{\overline{M}}$, $b = \overline{\overline{N}}$; $a < b$ signifie :
1° qu'aucune partie de M n'est équiv. à N ;
2° qu'une partie de N est équivalente à M.
Les 3 cas : $a = b$, $a < b$, $a > b$, s'excluent mutuellement, mais rien ne prouve jusqu'ici que ce soient les seuls cas possibles.
(Cela résulte de la théorie des nombres ordinaux)
§ 3. Addition et multiplication des puissances.
On considère l'ensemble-somme et l'ensemble-produit. Commutativité essentielle.
§ 4. Exponentiation des puissances.
On représente l'ensemble N sur l'ensemble M en faisant correspondre à chaque élément de N un élément de M. L'ensemble exponentiel $(N|M)$ est

la réunion de toutes ces représentations. Leur nombre cardinal est a^b. $(a = \overline{\overline{M}},\ b = \overline{\overline{N}})$

[La puissance du continu linéaire est $2^{\aleph_0}$.]

§ 5. Les nombres cardinaux finis.

Définition progressive par addition de 1.

Dans tout ensemble de ns card finis il y en a un qui est le plus petit de tous.

§ 6. Le plus petit nombre cardinal transfini $\aleph_0$.

Puissance de l'ensemble des ns cards finis.

Plus grand que tout n. fini. $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$.

– Théorèmes : Tout ensemble fini est tel qu'il n'est équivalent à aucune de ses parties.

Tout ensemble transfini est tel qu'il a des parties qui lui sont équivalentes.

Suite illimitée des nombres cardinaux $\aleph_\omega$.

§ 7. Types ordinaux des ensembles simplt ordonnés.

1° De 2 éléments $e_1\ e_2$, l'un est inférieur, l'autre supérieur ; $e_1 \prec e_2$.

2° Si $e_1 \prec e_2$, $e_2 \prec e_3$, on a : $e_1 \prec e_3$.

Notion de type ordinal, fondée sur la considération de la similitude de 2 ens. ordonnés et appliqués.

A ch. ns card infini correspond une classe de types.

Types inverses. Les types d'ordre peuvent être semblables à eux-mêmes d'une infinité de manières (ex : le type η de l'ens. des n rationnels)

§ 8 : Addition et multiplication des types.
Fondées sur la définition de la ~~somme~~ somme et du produit de 2 ensembles ordonnés. Associativité, mais non commutativité. Loi distributive :

$$a(b+c) = ab + ac$$

dans ce sens seulement (pour le mult^eur somme)

§ 9. Le type η de l'ensemble R de tous les rationnels > 0 et < 1, rangés par grandeur croissante.
Caractérisé par les 3 conditions suivantes :
1° Son nombre cardinal est $\aleph_0$;
2° Il n'a aucun élément inférieur ou supérieur à tous les autres ;
3° Il est partout condensé, càd. qu'entre 2 éléments quelconques il y en a toujours d'autres.

§ 10. Séries fondamentales contenues dans les ensembles ordonnés transfinis.
Ascendantes ou descendantes : $\alpha_n \prec \alpha_{n+1}$.
$\alpha_n \succ \alpha_{n+1}$.
Deux séries sont liées : $\alpha_n \,||\, \alpha'_n$
1° lorsqu'elles sont toutes deux ascendantes ou descend^tes, si à ch. élém. α_n on peut adjoindre un élément α'_m tel que : $\alpha_n \prec \alpha'_m$,
et si à ch. élém. α'_n on peut adjoindre un élément α_p tel que : $\alpha'_n \prec \alpha_p$.
2° lorsqu'elles sont de sens contraire, s'il n'y a qu'un seul nombre au plus qui soit inf. à tout α_n et sup.

à tout β_m, et qu'on ait : $\alpha_n > \beta_m$.

Deux séries fond liées à un même 3e sont aussi liées entre elles.

Limite d'une série fondamentale (ascendante) :
1° Si pour tout n on a : $\alpha_n < I$;
2° Si pour tout élément m de l'ensemble $< I$ il existe un nombre n_0 tel que : $a_n > m$ pour tout $n \geq n_0$.

Toutes les séries fond liées entre elles ont même limite ; et réciproquement.

(Remarque : La notion de limite ainsi définie est fondée sur l'idée d'ordre, et indépendante de l'idée de grandeur.)

§ 11. Le type θ du continu linéaire

Caractérisé par les propriétés suivantes :
1° Ensemble parfait (à la fois fermé et condensé) ;
2° Il contient un ensemble R dont le n. card. est $\aleph_0$, et tel qu'entre 2 élém. q.conques du 1er il existe toujours des éléments de R.

(Ici, on peut se demander si l'idée du continu n'implique pas nécessairement une idée de grandeur.)

§ 12. Ensembles bien ordonnés.

1° Il y a dans l'ensemble un 1er élém, inférieur à tous les autres ;

2° Si une partie M' de l'ensemble M est telle que M contienne des éléments supérieurs à ceux de M', il y en a un qui est le 1er de tous, et qui suit immédiatement tous ceux de M'.

– En partic. tout élément est suivi immédiatement d'un autre.

Toute partie d'un ensemble bien ordonné a un élément initial, et réciproquement (c.à.d que cette propriété caractérise l'ens. bien ordonné)

Toute partie d'un ensemble bien ordonné est un ensemble bien ordonné.

Si dans un ens. b. ord. on substitue à chaque élément un ens. b. ord., l'ens. obtenu est aussi bien ordonné.

§ 13. Segments d'un ensemble bien ordonné.

Ensemble de tous les éléments inférieurs à un élém. non initial. L'ensemble des autres est le Reste.

Si les 2 segments S et S' sont déterminés par les élém. f et f', et si $f < f'$, $A < A'$, A est un segment de A'.

Un ens. b. ord. n'est semblable à aucun de ses segments.

Un ens. b. ord. peut être semblable à une de ses parties.
Un ens. b. ord. ne peut être semblable à aucune partie de l'un quelconque de ses segments.
Deux segments différents d'un même ens. b. ord. ne sont jamais semblables.
Deux ens. b. ord. semblables ne sont applicables l'un sur l'autre que d'une seule manière.
Si ch. segm. d'un ens. b. ord. E est semblable à un segm. de l'ens. b. ord. F, et vice versa, les ens. E et F sont semblables.
Si ch. segm. d'un ens. b. ord. E est semblable à un segm. de l'ens. b. ord. F, et si au contraire il y a au moins un segm. de F qui ne soit semblable à aucun segm. de E, il y a un segment de F qui est semblable à E.
Si l'un des segm. de l'ens. b. ord. F n'est semblable à auc. segm. de l'ens. b. ord. E, tout segment de E est semblable à un segm. de F.
Donc: E et F étant 2 ens. bien ordonnés, ou bien E et F sont semblables;
ou bien un segm. de E est semblable à F;
ou bien un segm. de F est semblable à E.
Si une partie d'un ens. b. ord. n'est semblable à aucun de ses segments de cet ens. elle est semblable à l'ensemble tout entier.

§ 14. Nombres ordinaux

Ce sont les types ordinaux des ensembles bien ordonnés.
Trois cas exclusifs (et seuls possibles) pour 2 no. ordinaux: $a = b$, $a < b$, $a > b$.
Corollaire: Si $a < b$, $b < c$, on a: $a < c$.
La somme de 2 n. ord. est un n. ordinal.
Elle est toujours > à l'augende, ≥ à l'addende.
Le produit de 2 n. ord. est un n. ordinal.
Il est toujours > au mult^ande^ (si le mult^eur^ > 1) et ≥ au mult^eur^.
Soustraction toujours univoque.
On peut t^jrs^ faire la somme d'une ~~infinité~~ (suite) de n. ord.
Les sommes partielles forment une série fondamentale, dont la limite est la somme totale.
A ch. série fondam. de n. ord^x^ correspond un n. ord lim α_n, qui leur est immédiatement supérieur.
— A ch. n. card. fini correspond un seul n. ord.
Au n. même n. card. infini a correspond une classe $Z(a)$ de n. ord. infinis.
La deuxième classe de nombres est la classe $Z(\alpha_0)$.

§ 15. Les nombres de la deuxième classe

La 2e classe a un nombre plus petit que tous les autres: $\omega = \lim . n$ $\quad \overline{\omega} = \alpha_0$.
Si n est un n. ord. de la 1e classe, et α de la 2e, on a:
$n + \alpha = \alpha$, $\alpha - n = \alpha$, $n\omega = \omega$, $(\alpha+n)\omega = \alpha\omega$.

Si α est un n qcque de la 2e classe, l'ensemble des nombres inférieurs des 1e et 2e cl. est un ens bien ord de type α, et de nombre cardinal $\aleph_0$.

Les deux principes de formation de la 2e classe auxquels correspondent les deux espèces de n. ord.

§16. La puissance de la 2e classe numérique est égale au 2e nombre cardinal transfini $\aleph_1$.

§17. Les nombres de la forme: $\omega^m n_0 + \omega^{m-1} n_1 + \dots + n_m$. Tous les n. ord. de la 2e classe se ramènent d'une seule manière, à la forme de fonctions algébriques entières de degré fini de ω.

Addition, multiplication. Décomposition en facteurs premiers de la forme: $\omega^\gamma + 1$.

§18. L'exponentielle γ^α dans le domaine de la 2e classe numérique

Le définit comme la fonction uniforme qui jouit des propriétés suivantes:

1° $f(0) = \delta$.

2° Si $x < x'$, $f(x) < f(x')$.

3° $f(x+1) = f(x)\gamma$.

4° $[x_n]$ étant une série fond qcque, on a:

$$f(x) = \lim f(x_n) \quad \text{pour} \quad x = \lim x_n.$$

En prenant $\delta = 1$, on obtient l'exponentielle γ^x. Pour δ qcque, on a: $f(x) = \delta\gamma^x$. On démontre:

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta. \qquad \gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta.$$

Si $\gamma > 1$, on a toujours : $\gamma^{\xi} \geqq \xi$.

§ 19. Forme normale des nombres de la 2e classe.

$$a = \omega^{\alpha} k + \alpha' \quad \text{(forme unique)}$$

où : $0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha}$, $\quad 0 < k < \omega$,

α' est tjrs $< a$, et $\alpha \leq a$. Forme normale :

$$a = \omega^{\alpha_0} k_0 + \omega^{\alpha_1} k_1 + \dots + \omega^{\alpha_n} k_n$$

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \geqq 0,$$

$k_0, k_1, k_2, \dots k_n$ sont des n. de la 1e classe.

Addition et multiplication.

Pour que 2 nombres a et b de la 2e classe vérifient la relation :

$a + b = b + a$, $\quad | \quad$ $ab = ba$,

il faut et il suffit qu'ils aient la forme :

$a = cm$, $b = cn$ $\quad | \quad$ $a = c^{m}$, $b = c^{n}$,

m et n étant des n. de la 1e classe.

§ 20. Les nombres ε de la 2e classe numérique.

On appelle nombre ε toute racine de l'équation :

$$\omega^{x} = x.$$

Soit γ un nombre ne vérifiant pas cette équation ;

$\gamma_1 = \omega^{\gamma}$, $\quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}$, $\dots$ $\gamma_n = \omega^{\gamma_{n-1}}$, $\dots$

les n. $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n \dots$ forment une série fondam. dont la limite $E(\gamma)$ est un nombre ε.

Le nombre $E(1)$ est le plus petit des nombres ε (ε_0)
Soit ε_n un nombre ε, $E(\varepsilon_n + 1)$ est le nombre ε immédiatement supérieur.
Si l'on a une suite infinie de nombres ε_n, $\lim \varepsilon_n$ est encore un nombre ε.
Les nombres ε de la 2e classe forment un ensemble bien ordonné dont le type est Ω et le n card $\aleph_1$.
Si α est un n. qcque inférieur à ε, on a :

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha^{\varepsilon} = \varepsilon$$

Si α est un n. qcque de la 2e classe, l'équation :

$$\alpha^x = x$$

n'a pas d'autres racines que les nombres $\varepsilon > \alpha$

Giovanni Vailati: Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi (Note présentée à l'Académie royale des sciences de Turin. Clausen, 1898)

Importance ~~historique~~ de Benedetti dans l'histoire de la Mécanique (né à Venise 1530, mort à Turin 1590) comme précurseur de Galilée

Son ouvrage principal: Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber (Turin, 1585)

Cf. Libri: Histoire des sciences mathématiques (1838)

Whewell: History of inductive Sciences (London, 1857)

Poggendorf: Geschichte der Physik (1879)

Dühring: Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik (1874)

A reconnu fausse la loi énoncée par Aristote:
« La vitesse des graves en divers milieux est en raison inverse de ~~leur~~ densités de ces milieux »
et l'a remplacée par la suivante:
« La vitesse d'un grave dans un milieu est proportionnelle à son poids apparent dans ce milieu » qui est exacte) et qui est un cas particulier de la 2e loi de Newton (proportionnalité des vitesses aux forces) Premier essai de réduction de la Dynamique à la Statique

Contre l'opinion de Aristote, que le soleil attire les vapeurs, Benedetti adopte celle de Démocrite, de Straton et d'Epicure, selon laquelle tous les corps sont pesants. Il explique l'ascension des corps légers par le principe d'Archimède

Aristote croyait que, dans un même milieu, les vitesses des graves étaient proportionnelles à leur poids. Benedetti est le premier qui démontre que tous les corps tombent avec la même vitesse dans le vide, et que leur vitesse est indépendante de leur poids. Dans un milieu résistant, des corps, ~~même hétérogènes~~, tombent avec la même vitesse si les résistances sont proportionnelles à leurs poids.

Mais il a commis une erreur en affirmant que deux corps hétérogènes, de même forme et de même grandeur, ont des vitesses de chute proportionnelles à leur poids apparent dans le milieu.

— Il a connu la loi de inertie (tendance des corps à continuer leur mouvement en ligne droite (1) par la tangente) Il explique ainsi la force centrifuge qui maintient les astres suspendus, malgré leur poids (suivant Empédocle et Anaxagore)

Il connaît aussi la 2e partie de la loi de inertie (persistance de la vitesse (1)) et explique par là l'accélération d'un corps soumis à une force constante. La chute est un mouvement uniformément accéléré.

(Aristote et Tartaglia expliquaient l'accélération des graves en disant qu'ils sont d'autant plus pressés qu'ils approchent davantage du lieu auquel ils aspirent!) (fragment conservé par Simplicius)

Pour Hipparque, un grave lancé verticalement en haut redescend parce que la vitesse ~~comm~~ initiale s'épuise

---

(1) Méconnue par Aristote, qui cherchait au contraire à expliquer ce fait par l'action continuelle d'une force.

tandis que celle de la chute reste constante ! Quand le corps part du repos, la réaction de l'appui lui imprime une vitesse virtuelle primitivement égale à la vitesse de chute, et qui neutralise partiellement celle-ci. Une fois la vitesse initiale épuisée, le mouvement de chute devient uniforme.

Question posée par Léonard de Vinci et controversée : Qu'arriverait-il si le grave pouvait atteindre le centre de la terre ? Les péripatéticiens prétendaient qu'il s'y arrêterait, ayant atteint son but. Maurolycus, Cardan, Tartaglia ~~et Bend Benedetti~~ pensent au contraire que le grave oscillerait de part et d'autre du centre ; et Benedetti justifie leur opinion par l'analogie du pendule.

Benedetti croit qu'un corps lancé horizontalement est par là retardé dans sa chute (Galilée est le premier qui ait dissipé cette erreur).

Il croit que le mouvement de rotation d'une toupie la rend plus légère, et lui permet de se tenir sur sa pointe.

Enfin il était partisan enthousiaste du système de Copernic.

Giov. Vailati: Alcune Osservazioni sulle Questioni di parole nella Storia della Scienza (Bocca, 1899)

§1. Importance paradoxale des questions de mots dans le développement de la science. Source d'erreurs, de sophismes, ou au contraire auxiliaire précieux

§2. Le langage scientifique se sert de termes définis (au moyen d'autres termes) par l'énumération des caractères communs à plusieurs objets. Deux concepts peuvent avoir même extension et des compréhensions différentes.

Distinguer les propositions qui énoncent les propriétés d'un objet et celles qui énumèrent le contenu d'un concept (le définissent) Cette distinction n'est pas marquée dans le langage

§3. Elle est nécessaire en Géométrie. Socrate et Platon recherchaient surtout le sens des mots (?), cherchaient des définitions précises par l'énumération des cas particuliers. Les principaux dialogues de Platon ont pour objet des définitions de mots. C'est aussi une gymnastique intellectuelle

§4. La confusion des deux espèces de propositions est la source de beaucoup d'erreurs. Ex: la loi d'inertie et la loi d'équilibre, présentées comme des lois objectives ne sont rien de plus que les définitions des mots force et moment (auxquels Galilée attachait un sens métaphysique)

§5. C'est ce qui a donné lieu à l'opinion que les vérités maths. sont a priori et certaines, ~~et~~ indépendantes des choses,

et portant sur des concepts. On les considère comme fondées sur des définitions et des conventions arbitraires. Mais alors, il faut postuler chaque fois l'existence de l'objet correspondant au concept. C'est là le vice de l'argument ontologique; abus de la déduction. De même Spencer, quand il considère les principes de la Mécanique comme évidents (a priori et nécessaires)

§6. Inversement, on croit à tort que Berkeley a voulu nier l'existence des choses extérieures, quand il a cherché à analyser le concept de existence réelle, et à déterminer les conditions subjectives auxquelles nous reconnaissons l'existence objective des choses. De même, on croit que Hume a voulu ruiner l'existence ou la connaissance des causes réelles par son analyse de l'idée de cause et des critères de la causalité (empiriques.)

De là vient encore l'équivoque qui consiste à dire que la Mécanique (en gén. la Physique) a pour but non d'expliquer, mais de décrire les phén. Comme si l'explication physique pouvait être qq chose de plus que la déduction des phén. à partir de certaines lois qui en sont la description ou le résumé.

§7. Réaction contre le positivisme sceptique & pessimiste: expliquer, dit-on, c'est réduire un mystère à un autre. Mais une explication physique est la découverte d'une analogie réelle entre 2 ordres de phén. (Le 1er s'explique aussi bien par le 2e que le 2e par le 1er; c'est le plus familier qui explique l'autre.) C'est se tromper sur le rôle de la déduction dans les sciences expérimentales que de lui reprocher de

s'appuyer sur des principes non démontrés. Il ne faut pas non plus faire appel à la Philosophie (Poincaré) pour établir les principes de la science.

§ 8. Autre illusion: considérer les termes non définis comme plus vagues et plus obscurs: c'est vouloir tout définir. Mauvaise habitude: demander qu'est ce que cette chose? C'est vouloir la réduire à une autre chose. Au fond, c'est demander son nom comme les enfants.

§ 9. Tendance à substantialiser les mots, et à leur assigner des causes. Ex: température, valeur (commerciale) etc. Tous les points de vue auxquels on peut dire une chose égale à une autre. On réalise des relations. En donnant un nom à toutes les relations symétriques et transitives, nous les réduisons à l'égalité. Il suffit de définir l'égalité et l'inégalité de 2 choses sous un certain rapport, sans avoir à définir ce rapport même (masse, température etc.)

§ 10. Illusion de croire que tout nom est le nom de quelque chose. Pourtant, elle a suggéré des généralisations utiles et fécondes, quoique purement verbales (?) Ex: point à l'infini, nombre irrationnel. Notion du calorique (fluide constant) d'où celle de chaleur latente. De même Mayer a été conduit à substantialiser la quantité de chaleur (se transformant en travail). Même illusion matérialiste dans la théorie de la valeur de Marx.

§ 11. De même, la force vive est le qq. chose qui se conserve dans le choc. Ce n'est pas une raison forte que une certaine somme se conserve constante, en Mécanique,

pour appeler tous ces termes *énergie* et pour les considérer comme diverses formes d'une *même substance* constante. Toute loi physique peut se représenter comme la conservation de *quelque chose*: il n'y a là rien de plus que la constance ou la permanence de la relation elle-même.

§ 12. Influence des mots sur le progrès des sciences; des nouvelles formules et expressions; des métaphores scientifiques. Obstacles venant d'une mauvaise notation.

Métaphores inconscientes du langage philosophique.

Les mythes nés de la personnification des mots.

§ 13. Pour s'affranchir des illusions du langage, il ne suffit pas de le vouloir. Il y faut l'exercice et l'habitude, la culture scientifique. Question de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne.

Survivance des erreurs et des préjugés du passé, grâce au langage. + Utilité de l'histoire des sciences & de la philosophie. La philosophie n'est pas une vaine logomachie et son histoire n'est pas le catalogue des aberrations de l'esprit humain.

+ Les mêmes causes agissent toujours sur nous et donnent naissance à des erreurs nouvelles. D'où —

Giovanni Vailati : Sull' Importanza delle Ricerche relative alla Storia della Scienze (Turin, Roux, 1897)
Le dédain cartésien pour l'histoire vient de l'attitude subversive que les rénovateurs de la science ont prise à l'égard de l'autorité des anciens (Aristote) Il fait place à présent au goût des recherches historiques.
Le monde de l'esprit devient aussi objet de science les opinions sont des faits qui ont leurs lois.
L'histoire des sciences tend à devenir elle-même une science. Elle remarque un processus analogue dans le développement des diverses sciences (les 3 états.)
L'histoire d'une science n'est pas l'énumération d'une suite d'échecs ~~(illegible)~~ aboutissant au succès final, mais d'une suite de succès partiels qui se dépassent et s'éclipsent mutuellement, ~~comme~~ c'est un processus d'approximations successives.

L'histoire d'une science permet de juger de son état actuel et d'en prévoir l'avenir. L'évolutionnisme donne une importance particulière à l'histoire des sciences, non seulement en montrant la continuité de l'esprit humain (Pascal, Bacon) mais encore en établissant le parallélisme entre l'évolution (mentale) de l'individu et celle de l'espèce (Darwin, Preyer etc)
Recherches de psychologie comparée (enfants, sauvages.)
La différence entre les géomètres grecs et les géomètres modernes (par ex. pour le raisonnement par l'absurde) est analogue à la différence entre l'enfant et l'adulte.
– L'enseignement de l'histoire des sciences dans les Universités allemandes.

Du rôle de l'histoire des sciences dans l'enseignement; de sa valeur pédagogique. La meilleure méthode didactique est la méthode heuristique, c. à d. l'ordre d'invention et de développement des vérités scientifiques (?)
Les digressions historiques intéressent les élèves plus qu'un cours didactique et déductif.

— Intérêt particulier de l'histoire des mathématiques. Aucune science ne manifeste mieux la solidarité du présent et du passé, la collaboration des savants anciens avec les modernes. Cette collaboration prend une forme inconsciente, et d'autant plus impérieuse dans l'emploi des symboles et des algorithmes; les découvertes des prédécesseurs sont condensées dans les formules et les règles de calcul. (Superstition d'Euler pour les résultats du calcul) et les formules)
Les principaux progrès des mathématiques consistent moins dans l'acquisition de faits ou de connaissances nouvelles, que dans l'invention de méthodes d'invention ou de démonstration, ou même de notations nouvelles ou de procédés de calcul.

Aussi les plus grands progrès ont-ils paru aux contemporains se réduire à des changements de notation, dont la commodité n'apparaissait pas, à cause de l'accoutumance aux anciens symboles. C'était l'objection de Roberval à la Géométrie analytique de Descartes, d'Huyghens au Calcul infinitésimal de Leibnitz: on leur reprochait d'exprimer d'une nouvelle manière des faits déjà connus. Leibnitz répondait qu'il découvrait et démontrait les mêmes

vérités sous une forme plus commode et plus courte, ce qui simplifiait les questions et permettait d'en résoudre de plus difficiles et de plus compliquées, qui échappaient aux anciens procédés.

Les mathématiques sont analogues aux industries où le capital fixe (matériel, instruments) est beaucoup plus important que le capital circulant (matières premières.) Aussi le changement de méthodes produit-il une révolution profonde et coûteuse.

— Considérations spéciales sur la Mécanique

Boltzmann remarque que la Mécanique a subi une évolution contraire à celle de l'histoire naturelle, qui de descriptive est devenue explicative. Kirchhoff lui assigne pour objet la description aussi simple que possible des mouvements de la nature.

Ce ne sont pas les principes qui jugent les faits, ce sont les faits qui jugent les principes dont on essaie de les déduire.

Importance des considérations de finalité ou de commodité (Zweckmässigkeit, Hertz.) De même que Galilée préfère l'hypothèse de la rotation de la terre parce qu'elle est la plus commode et la plus simple, Lagrange et autres ont préféré tel ou tel principe parce qu'il ~~~~ était le point de départ le plus commode et le plus simple pour déduire les autres lois. De cette lutte pour la vie des principes il résulte une espèce de sélection qui a ~~~~ fait triompher les plus simples et les plus généraux, les plus satisfaisants au point de vue logique et esthétique

En somme, les principes de la Mécanique sont des réceptacles appropriés aux faits, des résumés d'expériences destinés à comprendre le plus de faits possible sous une seule formule et à en déduire le plus de lois empiriques possible, de manière à économiser autant que possible les appels à l'expérience et à l'intuition, à réduire au minimum les données empiriques de la science.

George Bruce Halsted : Report on Progress in Non Euclidean Geometry . ap. Science N.S. vol. X, n° 251, p. 545-557, 20 octobre 1899)
L'auteur a établi l'indépendance de Lobatchevski et Bolyaï par rapport à Gauss (Science t. IX, n° 232.)
Voir un article de Poincaré ap. Monist, t. IX. oct. (1898) Comme Lobatchevski, il fait dériver la géométrie des propriétés des corps, du mouvement.
V. Sophus Lie, Ueber die Grundlagen der Geometrie, ap. Berichte der K. Sachs. Akademie (1890)
Gérard, dans sa thèse, a cherché à établir la Géom. non euclidienne par des constructions permises, en précisant les postulats : par ex : construire une droite passant par 2 points donnés. Cette question a été traitée par Burnside ap. Proceedings of the London Mathematical Society, t. XXIX (1897)
Il faut traiter les cas où l'un des points, ou tous les deux, sont à l'infini ou imaginaires.
Killing : Einführung in die Grundlagen der Geometrie (Paderborn, 1898)
Macauly : J. Bolyaï's Science Absolute of Space ap. The Mathematical Gazette, n°s 8 et 9 (1896)
Whitehead (ap. Proceedings .... t. XXIX, mars 1898) généralisant une vue de Bolyaï, a démontré qu'il

existe dans l'espace elliptique aussi bien que dans l'espace hyperbolique des surfaces réelles dont la géométrie géodésique est celle des droites du plan euclidien.

Le Tentamen de Bolyai Farkas a été réimprimé par l'Académie hongroise des sciences (1^r vol 1897.) On y trouve déjà les trois axiomes de Helmholtz (continuité, congruence et libre mobilité des corps.)

La même Académie a réimprimé la Correspondance de Gauss et de Wolfgang Bolyai. En 1816, celui-ci proposait à Gauss de recevoir à Göttingue son fils Jean, âgé de 14 ans. Gauss ne répondit pas, ce qui a peut-être privé la science du génie de Jean Bolyai.

Franz Schmidt a republié en 1897 la Scientia Spatii absolute vera, en latin, avec une traduction magyare de Suták.

V. Stäckel et Engel, die Theorie der Parallellinien, recueil des textes et documents de la G. non euclidienne.

V. pour l'histoire : Loria, Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, chap. XI.

Roberto Bonola: Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria non Euclidea, ap. Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche (1899.)

Ensayo sobre el Infinito, por A. Portuondo ingeniero de caminos. Madrid, Aribau, 1880.

Notions fondamentales. La quantité mathématique est la grandeur pour laquelle on a défini avec précision l'égalité et la somme de deux grandeurs.

La mesure des grandeurs est l'origine des nombres entiers, fractionnaires et incommensurables.

En vertu de la loi générale de continuité, la quantité est conçue comme continue.

Dans les Analyse supérieure on considère des quantités variables, indépendantes ou dépendantes (fonctions) et l'on étudie la loi de variation continue de celles-ci.

Une quantité variable, c'est à proprement parler une loi de variation continue.

On appelle limite d'une variable une quantité constante dont elle s'approche indéfiniment. (Limite finie est un pléonasme, car toute constante est finie.)

Les variables indépendantes n'ont pas de limites car elles n'ont pas de loi de variation.

Principe des limites: Deux quantités égales (constamment) ont des limites égales.

Variables infiniment grandes et infiniment petites: n'ont pas de limite. Le zéro n'a pas de sens comme limite des inf. petits, et est aussi illusoire que l'infini.

~~Le~~ Seul concept intelligible de l'infini est celui d'une variable qui croît indéfiniment (sans limite)
Pas de zéro non plus, ni de point, ni d'instant; le présent est une chimère. L'espace et le temps sont infinis dans le sens des infiniment grands (indéfinis)

Chapitre I : Ordination et valoration des lois infinitésimales.

Une variable infinitésimale est définie par sa loi de variation.
Si l'on choisit pour unité une variable infiniment petite u, et si une autre variable x est telle qu'on ait :

$$\lim \frac{x}{u^n} = k \quad (\text{valeur finie non nulle})$$

n sera l'ordre de l'infiniment petit x, et k sa valeur
On aura : $x = u^n(k+\omega)$ (ω inf. petit complémentaire de $\frac{x}{u^n}$.)
Rapport de deux infiniment petits :

$$y = u^m(h+\omega) \,; \quad x = u^n(k+\omega')$$

$$\frac{y}{x} = u^{m-n}\frac{h+\omega}{k+\omega'} = u^{m-n}\left(\frac{h}{k}+\omega_1\right)$$

L'ordre du rapport est la différence des ordres, et sa valeur est le quotient des valeurs.
Si les deux ordres sont égaux, le rapport est d'ordre fini, càd a une limite $\left(\frac{h}{k}\right)$.
Si les deux valeurs sont en outre égales, le rapport a pour limite 1.

Mêmes considérations pour les infiniment grands, comparés à l'unité $\frac{1}{u}$.

Les inf. grands sont des inf. petits d'ordre négatif, et réciproquement.

Changement d'unité : Si : $y = u^{mn}(k^m h + \omega)$

et : $x = u^n(k + \omega')$

on aura : $y = x^m(h + \omega_1)$

Continuité du domaine des lois de variation :

Supposons la valeur k inf. petite (décroissant indéf.) d'ordre $+\frac{1}{p}$.

$$x = u^n(k + \omega)$$

$$k = u^{-\frac{1}{p}}(k_1 + \omega')$$

$$x = u^n\left[u^{-\frac{1}{p}}(k_1 + \omega') + \omega\right] = u^{n-\frac{1}{p}}\left[k_1 + \omega' + u^{\frac{1}{p}}\omega\right]$$

Ainsi une loi infinitésimale d'ordre n et de valeur inf. petite d'ordre $-\frac{1}{p}$ équivaut à une loi infinitésimale d'ordre $n - \frac{1}{p}$ et de valeur k_1.

Inversement, une loi infinitésimale d'ordre $n - \frac{1}{p}$ et de valeur inf. petite d'ordre $\frac{1}{p}$ et de valeur k_1, équivaut à une loi infinitésimale d'ordre n et de valeur k_1.

L'ordre fini, comme le zéro, manque de sens dans le domaine des infiniment petits. Il ne peut se concevoir que comme la limite d'une loi de variation dont l'ordre n décroît indéfiniment, et dont la valeur k est la limite de la variable. On l'appelle ordre zéro, mais on ne peut jamais l'atteindre en partant des lois infinitésimales.

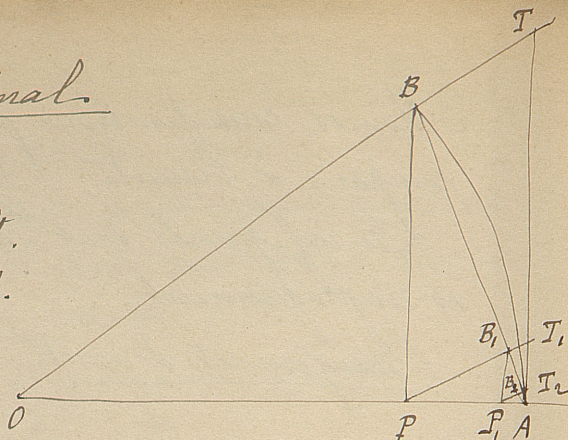


Tableau de l'infinitésimal.

Exemple géométrique :

Angle AOB infiniment petit.

Arc AB = u   OA = OB = 1.

lim OP = lim OT = 1.

BP, AT, AB sont des inf. petits d'ordre 1 et de valeur 1.

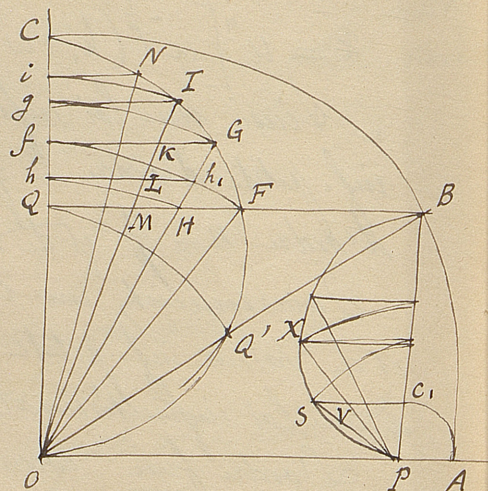
PA, PT_1, PP_1 sont des inf. petits d'ordre 2 et de valeur $\frac{1}{2}$.

B_1P_1, AT_1, AB_1 ——— 3 ——— $\frac{1}{2}$.

P_1A, P_1T_2, P_1P_2 ——— 4 ——— $\frac{1}{4}$.

B_2P_2, AT_2, AB_2 ——— 5 ——— $\frac{1}{4}$; e

Infiniment petits d'ordre fractionnaire :



OF est d'ordre $\frac{1}{2}$ et de valeur 1.

OG ——— $\frac{1}{4}$ ——— 1.

OH ——— $\frac{3}{4}$ ——— 1.

OI ——— $\frac{1}{8}$ ——— 1.

OK ——— $\frac{3}{8}$ ——— 1.

OL ——— $\frac{5}{8}$ ——— 1.

OM ——— $\frac{7}{8}$ ——— 1.

et ainsi de suite.

Interpolation d'ordres fractionnaires entre le 1er et le 2e ;

PS est d'ordre $\frac{3}{2}$ et de valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

PX ——— $\frac{5}{4}$ ——— $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

PV ——— $\frac{7}{4}$ ——— $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}$ — etc.

Chapitre II : Opérations algébriques sur les variables infinitésimales.

Symboles. Définition de l'égalité et de la somme de deux quantités variables ou lois de variation.

Le résultat d'opérations algébriques effectuées sur des variables continues qui ont des limites est une variable qui a pour limite le résultat des mêmes opérations effectuées sur leurs limites.

Ce théorème n'a pas de sens pour les variables infinitésimales. Si pourtant on dit que les infiniment petits ont pour limite 0, et les infiniment grands ont pour limite ∞, l'application du théorème conduit à des symboles qu'il faut interpréter.

§ I. Somme et reste. 0+0, 0-0.

Si les ordres sont inégaux, la somme est du même ordre et de la même valeur que l'inf. petit d'ordre inférieur. Si les ordres sont égaux, la somme est du même ordre et sa valeur est la somme des valeurs.

La différence de deux inf. petits a même ordre et même valeur que celui dont l'ordre est le plus petit ; ~~ou~~ si les ordres sont égaux, elle est du même ordre et sa valeur est la différence des valeurs.

La différence de deux inf. petits de même ordre et de même valeur est inf. petite par rapport à eux, donc d'ordre supérieur. Réciproque. Application au calcul des différences.

Cas particulier : variables à limite (d'ordre zéro)

Propositions analogues pour les infiniment grands.

$0+\infty$ ~~+~~, $\infty-0$, $0-\infty$ sont inf. grands.

$a+0=a$; $a+\infty=\infty$.

$a-0=a$; $a-\infty=-\infty$.

$0-a=-a$ $\infty-a=\infty$.

Exemples géométriques.

§ II. Multiplication. 0×0, $\infty\times\infty$, $0\times\infty$.

Le produit de deux infiniment petits est un inf. petit dont l'ordre est la somme de leurs ordres et la valeur le produit de leurs valeurs.

De même pour les infiniment grands.

Cas particulier : ~~valeurs~~ variables à limite (d'ordre zéro)

Généralisation : produit d'un inf. petit par un inf. grand ; produit d'un inf. petit ou d'un inf. grand par une variable à limite : $a\times 0$, $a\times\infty$.

Exemples géométriques.

§ III Division. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$.

Le quotient de deux infiniment petits est un inf. petit dont l'ordre est la différence de leurs ordres et la valeur le quotient de leurs valeurs.

De même pour les infiniment grands.

Cas particulier : quand le quotient est d'ordre zéro (a une limite)

Généralisation : quotient d'un inf. petit par un inf. grand, d'un inf. grand par un inf. petit ; d'un inf. petit ou inf grand par une variable à limite $\left(\frac{0}{a}, \frac{\infty}{a} ; \frac{a}{0}, \frac{a}{\infty}\right)$

Exemples géométriques.

§ IV. Puissances et racines. $0^a, \sqrt[a]{0}, \infty^a, \sqrt[a]{\infty}$.

Inf. petits et inf. grands d'exposant constant $\underline{a}$:

Si : $\mu = u^m(k+\omega)$, $\mu^a = u^{ma}(k^a+\omega_1)$

De même si l'exposant α est une variable à limite $\underline{a}$.

(la base doit être positive.)

Base ~~constante~~ positive ≷ 1, exposant infinitésimal : $\underline{a}^0, \underline{a}^\infty$.

Si : $\mu = u^m(k+\omega)$, $a^\mu = a^{u^m(k+\omega)}$

$\log a^\mu = \mu \log a = u^m(k+\omega)\log a$

Si μ est inf. petit, le logarithme a pour limite zéro, donc l'exponentielle a pour limite 1. Réciproque

Si μ est inf. grand, l'exponentielle sera inf. grande ou inf. petite suivant que son logarithme sera positif ou négatif (c.à.d. suivant que μ sera de même signe que $\log a$ ou de signe contraire.) Réciproque

De même si la base$^\alpha$ est une variable à limite $\underline{a}$.

L'exponentielle 1^μ (μ inf. petit ou inf. grand) est une constante dont la valeur est 1.

Lorsque la base α de l'exponentielle tend vers la limite 1,

1° Si l'exposant est inf. petit, elle a pour limite 1 :

$\log \alpha^\mu = \mu \log\alpha = u^m(k+\omega)\log\alpha$ (inf. petit)

2° Si l'exposant est inf. grand, le log. sera inf. petit, fini avec limite ou inf. grand suivant que l'ordre du facteur inf. petit $\log\alpha$ sera supérieur égal ou inférieur à l'ordre du facteur inf. grand $\mu = \frac{1}{u^m}(k+\omega)$.

Suivant ces trois cas, l'exponentielle aura pour limite 1, aura une limite différente de 1, ou sera infinitésimale (inf. petit si le log. est négatif; inf. grande s'il est positif)

Si la base et l'exposant sont tous deux infiniment grands:

$$\log M^N = N \log M = \frac{1}{u^n}(h+\omega) \log \frac{1}{u^m}(k+\omega)$$

le log. est inf. grand ~~si~~ positif $N > 0$, inf. ~~petit~~ grand négatif si $N < 0$. Donc l'exponentielle est inf. grande si l'exposant est positif, inf. petite si l'exposant est négatif. De même:

Une exponentielle de base inf. petite et d'exposant inf. grand est inf. grande si l'exposant est négatif et inf. petite si l'exposant est positif. (parce que $\log \mu$ est alors inf. petit négatif)

Enfin, dans le cas où la base est inf. grande et l'exposant inf. petit: $\log M^\nu = \nu \log M = u^n (h+\omega) \log \frac{1}{u^m}(k+\omega)$

le log. $(0 \times \infty)$ peut être inf. petit, fini ou inf. grand. Suivant les cas, l'exponentielle aura pour limite 1, aura une limite différente de 1, ou sera infinitésimale (inf. petite si le log. est négatif, inf. grande s'il est positif)

De même pour l'exponentielle à base et exposant inf. petits

$$\log \mu^\nu = \nu \log \mu = u^n (h+\omega) \log u^m (k+\omega).$$

Exemples géométriques.

§ V. Symboles d'indétermination: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty,$

1^∞ ou $\sqrt[0]{1}$; ∞^0 ou $\sqrt[\infty]{\infty}$; 0^0 ou $\sqrt[\infty]{0}$.

Ce sont les symboles qui, dans certains cas, correspondent à des limites finies et bien déterminées, les lois de variation étant connu

Exemple géométrique : centres de homothétie de deux cercles infiniment petits (les lois de variation des rayons étant données.)

Ou bien : composition de deux rotations inf. petites.

En résumé, on n'a de symboles d'indétermination vraie que dans les problèmes indéterminés, c.à.d. quand les données manquent en nombre ou en précision.

Chapitre III. Théorèmes fondamentaux du Calcul infinitésimal.

La limite du rapport de deux infiniment petits ne change pas quand on les remplace par d'autres infiniment petits de même ordre de même ordre (pouvant être différent) et de valeurs proportionnelles aux valeurs des premiers. — Réciproque

En particulier, ... quand on les remplace par des infiniment petits de même ordre et de même valeur (autrement dit, dont les rapports aux premiers ont pour limite 1 ;) ou encore : qui diffèrent des premiers d'une quantité inf. petite par rapport à eux-mêmes [c.à.d. d'ordre supérieur].)

Ce théorème sert de base au Calcul différentiel, où il s'agit de trouver la limite du rapport de 2 inf. petits. En effet, il permet de modifier l'inf. petit complémentaire ω (en particulier de l'annuler, ce qui se fait quand on remplace la différence par la différentielle)

Le problème général du Calcul intégral se ramène aux Quadratures, sommes d'un n. inf. grand d'inf. petits

Soit m l'ordre des inf. petits à sommer, $k, k', k'', \dots$ leur valeur. Soit n l'ordre ~~du nombre~~ de la somme inf. grande :

$\Sigma k = K$. Trois cas :

Si $m > n$, la somme est infiniment petite ;

Si $m = n$, la somme a pour limite la valeur K ;

Si $m < n$, la somme est infiniment grande.

D'ailleurs, le nombre N des inf. petits à sommer est du même ordre que K, puisque tous les k sont finis. Donc : la somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits de même ordre est une variable à limite, quand l'ordre des inf. petits est égal à l'ordre du nombre inf. grand ; et sa limite est la valeur de la somme inf. grande des valeurs des inf. petits.

Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que la limite d'une telle somme ne change pas, ~~est~~ quand on remplace les inf. petits par d'autres, est que la somme de leurs valeurs ait toujours la même valeur. La Réciproque est vraie.

Une condition suffisante, mais non nécessaire, est que les nouveaux inf. petits aient respectiv.t les mêmes valeurs que les anciens (que leurs rapports aient pour limite 1.)

Ce théorème sert de base au Calcul des Quadratures.

Note. On a mis en doute la rigueur du Calcul infinitésimal, parce qu'on se croyait pris dans ce dilemme : ou bien commettre une erreur, ce qui réduit le Calcul à un calcul d'approximation ; ou bien considérer le rapport de deux zéros, et la somme d'un nombre infini de zéros, ce qui n'a pas de sens. On y échappe en traitant simplement des limites de rapports et de sommes

Conclusion : Importance des variables infinitésimales.
Elles s'introduisent dès l'Arithmétique par la mesure des grandeurs incommensurables, où l'on est forcé de recourir au concept de limite. Elles permettent de définir les notions fondamentales de diverses sciences : la courbure en un point ; le poids spécifique en un point ; la vitesse et l'accélération en un instant, etc. (d'un mouvement connu)
La détermination de la vitesse en un instant revient au problème général du Calcul différentiel (Calcul des fluxions)
Inversement, un mouvement est parfaitement déterminé quand on connaît sa vitesse à chaque instant : c'est un problème de Calcul intégral (Calcul des quadratures) : connaître l'accroissement de la fonction qui correspond à un accroissement donné de la variable indépendante.
Notion de longueur curviligne (se définit par intégrale)
Théorie des contacts de divers ordres entre deux courbes.
Deux courbes : $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$
ont un contact d'ordre $(n-1)$ au point : $x = a$,
quand : $f(a+u) - \varphi(a+u) = u^n\left(\frac{f^n(a) - \varphi^n(a)}{1.2.3.\dots n} + \omega\right)$
L'ordre de la grandeur infinitésimale de cette différence exprime l'intimité du contact ; sa valeur permet de le comparer à un contact du même ordre

La note finale est destinée à montrer que, si (la limite du) le rapport de deux fonctions inf. petites est toujours du même ordre d'infinité que le rapport de leurs premières dérivées non nulles, il n'a la même valeur que si ce rapport a une limite (est fini) c.à.d. si les deux premières dérivées non nulles sont du même ordre

Note finale : sur le rapport de deux fonctions inf. petites.

Soient $f(x)$, $\varphi(x)$, nulles pour $x=a$; on étudiera le rapport : $\dfrac{\varphi(a+u)}{f(a+u)}$ où u est inf. petit.

1er Cas. $\varphi(a+u)$ et $f(a+u)$ sont inf. petits de même ordre n, c.à.d. que leurs dérivées sont nulles jusqu'à la $(n-1)^e$ incl.

$$\varphi(a+u) = u^n\left(\frac{\varphi^n(a)}{1.2.3.\ldots n} + \omega\right); \quad f(a+u) = u^n\left(\frac{f^n(a)}{n!} + \omega'\right)$$

donc : $$\lim \frac{\varphi(a+u)}{f(a+u)} = \frac{\varphi^n(a)}{f^n(a)}$$

limite commune de $\dfrac{\varphi'(a+u)}{f'(a+u)}$, $\dfrac{\varphi''(a+u)}{f''(a+u)}$, ... $\dfrac{\varphi^{n-1}(a+u)}{f^{n-1}(a+u)}$, et : $\dfrac{\varphi^n(a+u)}{f^n(a+u)}$.

2e Cas. $\varphi(a+u)$ est d'ordre supérieur à $f(a+u)$ $[n>m]$. Alors $\dfrac{\varphi(a+u)}{f(a+u)}$ est inf. petite d'ordre $n-m$, et sa valeur est :
$$V = \frac{\varphi^n(a)}{f^m(a)} \cdot \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots n}.$$

Les rapports des dérivées successives sont du même ordre, mais leurs valeurs vont en croissant, car elles sont respectivement :
$$\frac{n}{m}V, \ \frac{n(n-1)}{m(m-1)}V, \ \ldots \ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}V.$$

3e Cas : $n<m$. Alors les rapports sont inf. grands de l'ordre $m-n$, et ont les mêmes valeurs que ci-dessus : seulement elles vont en décroissant.

Mêmes conclusions si la ~~valeur~~ variable indépendante est inf. petite ou inf. grande $(a=0, \ a=\infty)$

De même pour le rapport de deux fonctions inf. grandes.

P. Appell : Leçons sur l'attraction et la fonction exponentielle (Carré, 1892)

Loi de Newton $F = \frac{f m \mu}{r^2}$.

Attraction d'un corps de densité ρ (variable) (fonction de x, y, z) sur un point (α, β, γ) de masse μ :

$$X = f\mu \iiint \frac{\rho(x-\alpha)}{r^3} \, dv$$

$$Y = f\mu \iiint \frac{\rho(y-\beta)}{r^3} \, dv$$

$$Z = f\mu \iiint \frac{\rho(z-\gamma)}{r^3} \, dv$$

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

Si l'on pose $u = \iiint \frac{\rho \, dv}{r}$

on a :

$$X = f\mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \qquad Y = f\mu \frac{\partial u}{\partial \beta} \qquad Z = f\mu \frac{\partial u}{\partial \gamma}.$$

En coordonnées polaires ;

$$u = \iiint \rho r \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Pour un point P extérieur à la masse attirante :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0. \text{ (éq. de Laplace)}$$

Pour P intérieur :

$$\Delta u = -4\pi k \qquad \text{(éq. de Poisson)}$$

k étant la densité au point $P(\alpha, \beta, \gamma)$

Attraction d'un corps sur un point P très éloigné (à la distance R d'un point O qcque du corps) :

$$u = \frac{1}{R}\iiint \rho\, d\tau + \frac{1}{R^2}\iiint \rho\, d\tau .\, \delta \cos\theta + \frac{1}{R^3}\iiint \rho\, \varepsilon\, d\tau$$

Or : $\iiint \rho\, d\tau = M$, donc $\lim_{R=\infty} Ru = M$.

Si O est le centre de gravité, $\iiint \rho\, d\tau .\, \delta \cos\theta = 0$.

Attraction d'une couche sphérique composée de couches concentriques homogènes.

P extérieur : $u = \frac{M}{r}$, $F = \frac{M}{r^2}$.

P intérieur : $u = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R\, dR = \text{Const.}$

$X = Y = Z = 0.$

P dans l'épaisseur de la couche (à la dist r du centre).

$$u = \frac{4\pi}{r}\int_{R_0}^{r} R^2 \rho\, dR + 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R\, dR$$

— Démonstration de l'équation de Poisson

$$\iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau = \iint (aF + bG + cH)\, d\sigma$$

a, b, c étant les cosinus de la normale extérieure de l'élément de surface $d\sigma$.

Posons $F = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $G = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $H = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

et $\lambda = \frac{\partial \rho}{\partial x} . \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} . \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} . \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

Formule de Green :

$$\iiint \rho . \Delta\varphi .\, d\tau + \iiint \lambda\, d\tau = \iint \rho \left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

On écrit aussi : $a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dn}$,
dérivée de φ suivant la normale.

Faisons : $\rho = \psi(x, y, z)$, $\varphi = \frac{1}{r}$:

Pour P extérieur, la formule de Green donne :

$$\iiint \lambda\, dv = \iint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma \qquad (\text{car } \Delta\varphi = 0)$$

Pour P intérieur, k étant la densité au point P :

$$\iiint \lambda\, dv = \iint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + 4\pi k$$

En appliquant à : $u = \iiint \rho\varphi\, dv$

la formule $\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dv = \iint a F\, d\sigma \qquad [F = \rho\varphi]$

~~on trouve~~ et en remarquant que $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$,

on trouve $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = -\iiint \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x} dv + \iint a\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x} d\sigma$

d'où :

$$\Delta u = -\iiint \lambda\, dv + \iint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = -4\pi k$$

En faisant dans la formule de Green $\rho = 1$, $\varphi = u$,
il vient : $\iiint \Delta u . dv = \iint \frac{du}{dn} d\sigma$

or : $\Delta u = -4\pi\rho$. $\iiint \Delta u . dv = -4\pi \iiint \rho\, dv = -4\pi M$.

Théorème de Gauss :

$$\iint \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M$$

(M) étant la somme des masses comprises dans la surface
laquelle est étendue l'intégrale en $d\sigma$.

Corollaire : La fonction potentielle ne peut avoir ni maximum ni minimum en dehors des masses attirantes.

En effet, en tout point extérieur entouré d'une sphère infiniment petite, on a $\iint \frac{du}{dr} d\sigma = 0$, ce qui ne serait pas possible si u était maximum ou minimum en ce point ($\frac{du}{dr} < 0$, $\frac{du}{dr} > 0$.)

Par suite, il ne peut y avoir que des positions d'équilibre instable en dehors des masses attirantes.

Masses attirantes illimitées :

L'attraction d'une droite homogène indéfinie sur un point extérieur est perpendiculaire à cette droite et a pour valeur :

$$- \frac{2f\mu h}{\delta}$$

μ étant la masse du point intérieur, δ sa distance à la droite, et h la densité linéaire de la droite.

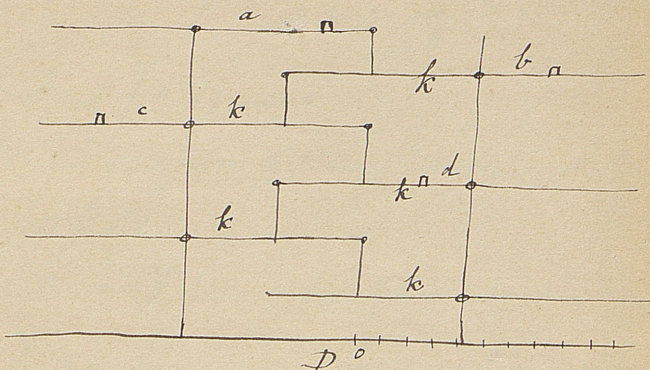
L'attraction d'un plan sur un point est indéterminée.

L'attraction d'un cylindre indéfini à base finie sur un point P de masse μ, de coordonnées α, β, γ, a pour composantes : $X = 2f\mu \frac{\partial v}{\partial \alpha}$, $Y = 2f\mu \frac{\partial v}{\partial \beta}$, $Z = 0$

v potentiel logarithmique. $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = 0.$

Fonction la plus simple : $\frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2)$

Machine à résoudre les équations algébriques.



[…] un système de leviers […]iculés, de longueur […] l, on dispose des [poids] […]s égaux, le premier à la [dist]ance a du point [d'a]ppui, le 2e à la distance […] etc. a, b, …. étant [com]ptés positivement ou négativement selon qu'on les porte [en] dedans ou en dehors. Soit D la distance (variable) des [tiges] […]nes qui portent tous les points d'appui, et $k = D - l$. La condition d'équilibre du système est:

$$\left\{\left[\left(a\frac{k}{l} + b\right)\frac{k}{l} + c\right]\frac{k}{l} + d\right\}\frac{k}{l} + \ldots\ldots = 0$$

[…]ou en posant $\frac{l}{k} = x$:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = 0$$

[On d]éplace l'un des axes jusqu'à ce qu'on ait établi l'équilibre [du s]ystème, et l'on trouve la valeur de x sur une règle divisée. [On] obtient ainsi toutes les racines réelles positives supérieures à 1. [Pour] obtenir les racines positives inférieures à 1, on remarque [que] si l'on pose: $\frac{k}{l} = x$, [on] trouve les racines inférieures à 1 de l'équation:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots\ldots = 0$$

Il faut donc disposer les coefficients dans l'ordre inverse, en [com]mençant par le levier inférieur –

[Pou]r obtenir les racines négatives, il faut changer le signe des […] de deux en deux, c.à.d. compter positivement les longueurs […]s sur la droite des leviers, négativement les l. p. à gauche.

Formules d'Electricité.

Loi de Coulomb: $F = k\frac{mm'}{r^2}$

Flux de force: $\mathcal{F} = \int F\,ds.\cos\alpha$

Flux de force à travers une surface fermée contenant M.

$$\mathcal{F} = 4\pi k M.$$

Potentiel: $dV = -d\mathcal{E} = -F\,dn = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$V = \Sigma\,\frac{km}{r} \quad \text{ou} \quad V = k\int\frac{dm}{r} = \int\frac{\rho\,dv}{r}$$

Potentiel d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur: $V = \frac{4\pi k\mu R^2}{a} = \frac{M}{a}.$

intérieur $V = 4\pi k\mu R = C^{te}$

Potentiel d'une sphère composée de couches concentriques homogènes sur un point intérieur:

$$V = 2k\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}k\pi\rho a^2$$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{4}{3}k\pi\rho\,a.$$

$$\Delta V = 4\pi k\rho.$$

Force exercée par une surface électrisée sur un point extérieur infiniment voisin: $F = 4\pi k\mu$

Relation entre la charge et la capacité d'un conducteur:

$$M = CV$$

Pour une sphère homogène: $M = RV.$

Capacité d'un condensateur plan (d = distance des armatures):

($4\pi k\mu = -\frac{\partial V}{\partial n}$) $$C = \frac{S}{4\pi k d}.$$

Capacité d'un condensateur sphérique: $C = \frac{1}{k} \cdot \frac{RR'}{R'-R}$

Capacité d'un condensateur cylindrique par unité de longueur

$$C = \frac{1}{2k \log \frac{R'}{R}}$$

Tension électrique ou pression électrostatique:

$$\tau = 2\pi k \mu^2 \quad \text{(par unité de surface)}$$

La force exercée par une surface électrisée sur un de ses éléments est: $F = 2\pi k \mu^2 ds = \tau ds$

Energie électrique: $W = \Sigma \frac{kmm'}{r}$.

$$W = \frac{1}{2} \Sigma MV = \frac{1}{2} \Sigma CV^2 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{M^2}{C}.$$

Force exercée sur un corps électrisé: $F = -\frac{dW}{dr}$

Loi d'Ohm: $E = V_1 - V_0 = IR$. $\left(R = \rho \frac{l}{s}\right)$

Loi de Joule: $W = RI^2t = RIQ$ $(Q = It)$

Lois de Kirchhoff. 1° pour les sommets:

$$\Sigma I = 0$$

2° pour les circuits: $\Sigma(IR - E) = 0$.

Constante diélectrique: $\frac{k}{k'} = K$ (k dans le vide)

Electromètre sphérique: $F = \frac{V^2}{8k}$

Electromètre Bichat-Blondlot: $F = \frac{(V_1 - V_2)^2}{4k \log \frac{r_2}{r_1}}$

Electromètre de lord Kelvin: $F = \frac{S}{8\pi k} \left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2$

Electromètre à quadrants:

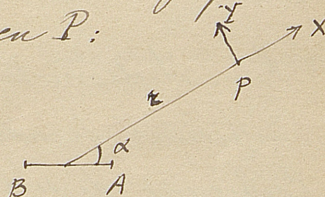
$$F = \frac{r}{4\pi k d} (V_1 + V_2 - 2V_0)(V_1 - V_2)$$

Dans la disposition symétrique de M. Mascart :
la déviation α est proportionnelle à $-4 V_0 V_1$.
~~Force magnétique sur un pôle~~
~~Moment magnétique~~
Moment du couple directeur : $\mathcal{M} = \frac{MF}{\mu}$.
Loi de Coulomb pour les forces magnétiques :

$$F = \frac{mm'}{\mu r^2} \qquad V = \Sigma \frac{m}{\mu r}$$

$$V = \frac{M \cos\alpha}{r^2}$$

Moment magnétique : $M = ml$.
Composantes de la force exercée par l'aimant inf. petit AB sur l'unité de masse magnétique en P :



$$X = \frac{2M\cos\alpha}{\mu r^3} \qquad Y = \frac{M \sin\alpha}{\mu r^3}$$

Dans les 2 positions de Gauss :

$$X_0 = \frac{2M}{\mu r^3} \qquad Y_0 = \frac{M}{\mu r^3}$$

Intensité d'aimantation : $dM = I\,dv$
Potentiel d'un ~~?~~ aimant sur un point extérieur P :

$$V = \int \frac{I\cos\alpha}{r^2}\,dv$$

Moment magnétique d'un courant fermé : $M = \frac{SI}{v}$. (1)
Potentiel magnétique d'un feuillet ~~courant fermé~~ sur un point d'où on voit sous l'angle solide ω : $V = P\omega$. (2) $W = -P\Phi$.
Boussole des tangentes : $tg\,\beta = \frac{2\pi I}{HR}$
Id (forme de M. Lippmann) : $tg\,\beta = \frac{4n\pi I}{H}$.
Electrodynamomètre de M. Pellat :

$$I = \sqrt{\frac{LP}{4n\pi NS}} = K\sqrt{P}$$

[Pu]issance d'un solénoïde magnétique : $P = I\sigma$. $dM = P\,dx$.
[Pu]issance d'un feuillet magnétique : $P = Ie$. $dM = P\,ds$.
[Po]tentiel d'un solénoïde : $V = P\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Courants variables. Intensité moyenne: $J = \frac{1}{t}\int I\,dt$

Energie moyenne: $W = \frac{R}{t}\int I^2 dt$.

Galvanomètre balistique: $Q = \frac{2K}{Gg}\sqrt{\frac{H}{M}}\sin\frac{\alpha}{2}$.

T durée d'oscillation pour H:

$$Q = \frac{HT}{\pi g}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Travail électromagnétique: $d\mathcal{C} = I\,d\mathcal{F}$ (1)

Equation de l'induction: $EI\,dt = RI^2dt + I\,d\mathcal{F}$

ou: $E = RI + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

Force électromotrice induite: $E' = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}$.

Coefficient d'induction mutuelle: $\mathcal{F} = MI$. $E' = -M\frac{dI}{dt}$.

Coefficient de self-induction: $\mathcal{F} = LI$. $E' = -L\frac{dI}{dt}$.

Force magnéto-électrique (F intensité du champ mg.): (2)

$$X = FI\,ds.\sin\theta$$

Action d'un courant sur un courant (formule de Ampère):

$$F = -2\frac{II'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

Travail élémentaire: $d\mathcal{E} = II'd\iint\frac{\cos\omega.\,ds\,ds'}{r}$

d'où: $M = \iint\frac{\cos\omega.\,ds\,ds'}{r}$.

Equation d'établissement d'un courant: $I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Equation de rupture d'un courant: $I = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$

Potentiel d'un courant fermé sur un point d'où on le voit sous l'angle solide ω: $V = I\omega$ en gén.: $W = -I\mathcal{F}$

---

(1) Force exercée sur un courant fermé: $X = \frac{d}{dx}(\mathcal{F}I)$

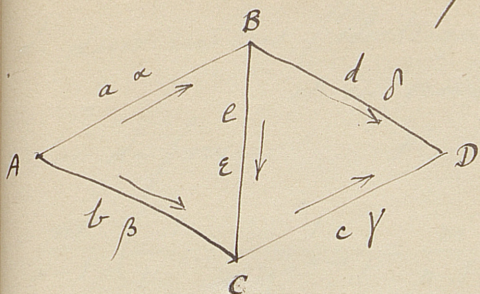
$X = -\frac{d\mathcal{C}}{dx}$ $\mathcal{C} = \mathcal{F}I$.

Quantité d'électricité induite par la variation de flux $\Delta\mathcal{F}$:

$$Q = -\frac{\Delta\mathcal{F}}{R}.$$

(2) Loi de Biot et Savart: $F = 2\frac{mI}{a}$. Formule de ~~Ampère~~ Laplace: $F = \frac{mI\,ds.\,\sin}{r^2}$

Formule du pont de Wheatstone.



Soit E la force électromotrice de la pile, ou la différence de potentiel entre les sommets A et D ; soient $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ les résistances des cinq branches, et $a\ b\ c\ d\ e$ les intensités inconnues du courant qui les traverse dans le sens indiqué par les flèches ; on a, d'après les lois de Kirchhoff les relations suivantes :

$$a = d + e \qquad a\alpha + d\delta = E \qquad a\alpha + e\varepsilon = b\beta$$
$$c = b + e \qquad b\beta + c\gamma = E \qquad e\varepsilon + c\gamma = d\delta$$

En effectuant les éliminations suivantes :

$$a = d + e \qquad b = c - e \qquad c = \frac{d\delta - e\varepsilon}{\gamma}$$
$$d = \frac{E - e\alpha}{\alpha + \delta}$$

on trouve la solution :

$$e = E\,\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha\delta(\beta+\gamma) + \beta\gamma(\alpha+\delta) + \varepsilon(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}$$

Pour que le courant qui passe par le galvanomètre (e) soit nul, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 0$$

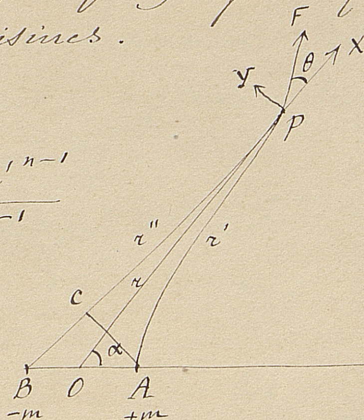
ou :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma} \right)$$

Dans ce cas, on a simplement :

$$a = d = \frac{E}{\alpha+\delta}\,, \qquad b = c = \frac{E}{\beta+\gamma}\,.$$

Calcul du potentiel et de la force de deux masses (électriques ou magnétiques) symétriques et infiniment voisines.



Loi de force : $F = \dfrac{mm'}{r^n}$.

$$= \frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{r'^{\,n-1}} - \frac{1}{r''^{\,n-1}}\right) = \frac{m}{n-1} \times \frac{r''^{\,n-1} - r'^{\,n-1}}{(r'r'')^{n-1}}$$

$= l$ (infiniment petit.) $r = r' = r''$.

$$^{-1} - r'^{\,n-1} = (r''-r')(r''^{\,n-2} + r''^{\,n-3} r' + \ldots + r'^{\,n-2})$$

$$= (n-1)\, r^{n-2} (r''-r')$$

$' = BC = l\cos\alpha$. $\quad V = \dfrac{ml\cos\alpha}{r^n} = \dfrac{M\cos\alpha}{r^n}$.

posantes de la force :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r} = n\,\frac{M\cos\alpha}{r^{n+1}} \qquad (dy = r\,d\alpha)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy} = \frac{M\sin\alpha}{r^{n+1}}$$

e : $\quad F = \dfrac{M}{r^{n+1}}\sqrt{n^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{M}{r^{n+1}}\sqrt{1 + (n^2-1)\cos^2\alpha}$

$\alpha = 0, \quad F = X_0 = n\,\dfrac{M}{r^{n+1}} \qquad \dfrac{X_0}{Y_0} = n$.

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \quad F = Y_0 = \dfrac{M}{r^{n+1}}$

$= \dfrac{Y}{X} = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}(\theta+\alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta} = \dfrac{(n+1)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{n - \mathrm{tg}^2\alpha}$.

$+\alpha) = 0$ pour $\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \quad (\alpha = k\pi)$

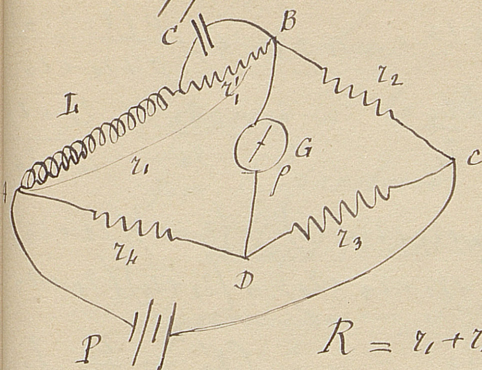
$+\alpha) = \infty$ pour $\mathrm{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{n}$, c.à.d. si $n = 2$:

pour $\mathrm{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{2} \quad (\alpha = 54°44'8'')$

$+\alpha) = 0$ pour $\mathrm{tg}\,\alpha = \infty \quad \left(\alpha = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

: $\mathrm{tg}(\theta+\alpha) = 0$ pour $\alpha = k\dfrac{\pi}{2}$.

Opposition d'une self induction et d'une capacité.



Condition d'équilibre du pont en régime permanent : $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_4}{r_3}$.

Courant de rupture :

$$RI + L_1 \frac{dI}{dt} = 0$$

Intégrons (de I_0 à 0) $QR - L_1 I = 0$.

$$Q = \frac{L_1 I}{R}$$

$$R = r_1 + r_4 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_2 + r_3}}$$

[Fr]action de Q qui passe par G : $Q_x = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} Q$.

[Cha]rge du condensateur C : $M = CV = CIr_1'$.

[Fra]ction de M qui passe par L_1 : $M_y = \frac{r_1'}{R} M$. $M_x = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} M_y$.

[Con]dition d'équilibre au moment de la rupture :

$M_x = Q_x$ ou $M_y = Q$ $\boxed{Cr_1'^2 = L_1.}$

[Au]tre disposition : la capacité est en dérivation sur la branche [op]posée à la self-induction : on a encore $Q = \frac{L_1 I_1}{R_1}$.

Mais la charge du condensateur est

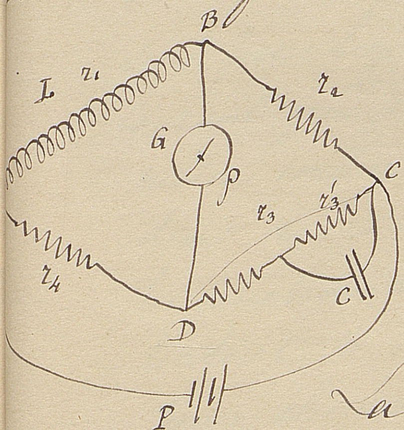
$$M = CV = CI_2 r_3'$$

La fraction de M qui passe par r_2 est

$$M_y = \frac{r_3'}{R_2} M$$

et la fraction de M_y qui passe par G :

$$M_x = \frac{r_1 + r_4}{\rho + r_1 + r_4} M_y.$$



La condition d'équilibre à la rupture est

$$M_x = Q_x.$$

$$\frac{\ldots}{\ldots r_4} \times \frac{CI_2 r_3'^2}{\underbrace{r_2 + r_3 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_1 + r_4}}}_{(R_2)}} = \frac{r_2 + r_3}{\rho + r_2 + r_3} \times \frac{L_1 I_1}{\underbrace{r_1 + r_4 + \frac{1}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r_2 + r_3}}}_{(R_1)}}$$

$$\frac{Cr_3'^2}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} \times \frac{r_2+r_3}{r_1+r_4} \times \frac{\rho+r_1+r_4}{\rho+r_2+r_3} \times \frac{r_2+r_3+\dfrac{\rho(r_1+r_4)}{\rho+r_1+r_4}}{r_1+r_4+\dfrac{\rho(r_2+r_3)}{\rho+r_2+r_3}}$$

Or: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_3+r_4}{r_1+r_2} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_1}$. $\quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_2+r_3}{r_1+r_4}$

$$(\rho+r_1+r_4)(r_2+r_3)+\rho(r_1+r_4) = \rho(r_1+r_2+r_3+r_4)+(r_1+r_4)(r_2+r_3)$$
$$(\rho+r_2+r_3)(r_1+r_4)+\rho(r_2+r_3) = \rho(r_1+r_2+r_3+r_4)+(r_1+r_4)(r_2+r_3)$$

Donc: $\frac{Cr_3'^2}{I_1} = \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_1}$. $\quad \underline{Cr_3'^2 = \frac{r_3}{r_1} I_1}$.

r_3 étant une somme constante, on peut faire varier r_3' et mesurer ainsi la self-induction I_1, connaissant r_1 par l'équilibre du pont en régime permanent.

(L'avantage de la 2e disposition sur la 1e consiste précisément à laisser r_1 constante et à ne pas détruire l'équilibre du pont en faisant varier r_3')

Sur la stabilité de la nature.

Loi de Lenz: Le courant induit tend à s'opposer à la ~~transformation~~ modification (déplacement) qui le produit. (Mascart, 368.)

– Dans le cas de l'inversion d'un courant thermodynamique, s'il n'y avait que des forces électromotrices de contact, le courant transporterait de la chaleur de la soudure froide à la soudure chaude, et par conséquent s'~~engendrerait~~ entretiendrait et s'accroîtrait de lui même; cela est contraire au principe de Carnot. (Mascart, 205.)

– Un courant qui traverse une soudure dans un sens l'échauffe, dans l'autre sens, la refroidit. Le sens pour lequel il y a refroidissement est celui du courant que produirait l'échauffement de la même soudure; sans quoi le courant s'entretiendrait de lui même indéfiniment. En réalité, les variations de température produites par un courant tendent à l'affaiblir, en développant des forces électromotrices inverses (Mascart, 212.)

De même qu'un courant qui traverse un électrolyte développe une force électromotrice inverse de polarisation.

Conséquences du principe de Carnot (Marcart)

Dans une transformation adiabatique

$$c\,dT = -T\frac{\partial}{\partial T}(d\mathfrak{C})$$

le corps s'échauffe ou se refroidit suivant que le travail des forces extérieures $-d\mathfrak{C}$ nécessaire pour produire la transformation ~~diminue~~ augmente ou ~~augmente~~ diminue quand la température croît. Ainsi, quand la transformation équivaut à celle qui résulterait d'une diminution de température, le corps s'échauffe; il y a refroidissement si le travail extérieur produit un effet de même sens qu'une élévation de température.

En résumé, la variation de température tend à s'opposer au travail extérieur; autrement dit, le travail extérieur fait varier la température dans ~~le~~ un sens ~~où elle~~ tel qu'elle s'oppose à la transformation.

Ainsi il semble que la nature résiste aux changements d'état, et tende à atténuer et à amortir les ~~variations~~ transformations.

Voir Sir W. Thomson Philosophical magazine (5), t. V, p. 4 (1878)

Remarques sur la corrélation des mathématiques et de la physique.

Le potentiel électrique, dont la définition est purement analytique (fonction dont les dérivées changées de signe sont les composantes de la force) prend une existence physique et devient une grandeur observable et mesurable dans l'électromètre.

— L'intensité moyenne $\frac{1}{t}\int I\,dt$ d'un courant alternatif est nulle, mais son énergie moyenne $\frac{1}{t}\int RI^2\,dt$ ne l'est pas; aussi agit-il sur l'électrodynamomètre et non sur le galvanomètre (l'indication du second étant proportionnelle à l'intensité, et celle du premier au carré de l'intensité.) Ce fait physique réalise ce fait purement algébrique, que tout carré est positif, lequel dérive de la définition, conventionnelle en apparence, de la multiplication : $(-a)(-a) = +a^2$. Règle paradoxale ou tout au moins arbitraire.

— Contre la thèse d'Helmholtz et des nominalistes, qu'une grandeur physique n'existe que dans l'instrument qui la mesure et n'est définie que par lui :

Le galvanomètre sert à mesurer toutes les grandeurs électriques ; une même déviation correspond, suivant les cas, à une force électromotrice, à une résistance, à une capacité. Pour interpréter ses indications, il faut donc avoir l'idée de la grandeur à mesurer, et cela, par la construction et la disposition des appareils.

Remarque curieuse : On n'a d'étalons que des résistances des forces électromotrices et des capacités ; or on ne peut mesurer directement ces grandeurs en les comparant à l'étalon. On ne les mesure que par l'intermédiaire des intensités ou des quantités d'électricité (galv. balistique) (galvanomètre) dont on n'a pas d'étalon. Ainsi les mesures primitives ne dépendent pas de la possibilité de réaliser un étalon matériel (comme le mètre ou le gramme)

— Résistance critique d'un galvanomètre balistique.
L'angle θ de déviation est une fonction du temps qui vérifie une équation différentielle de la forme :

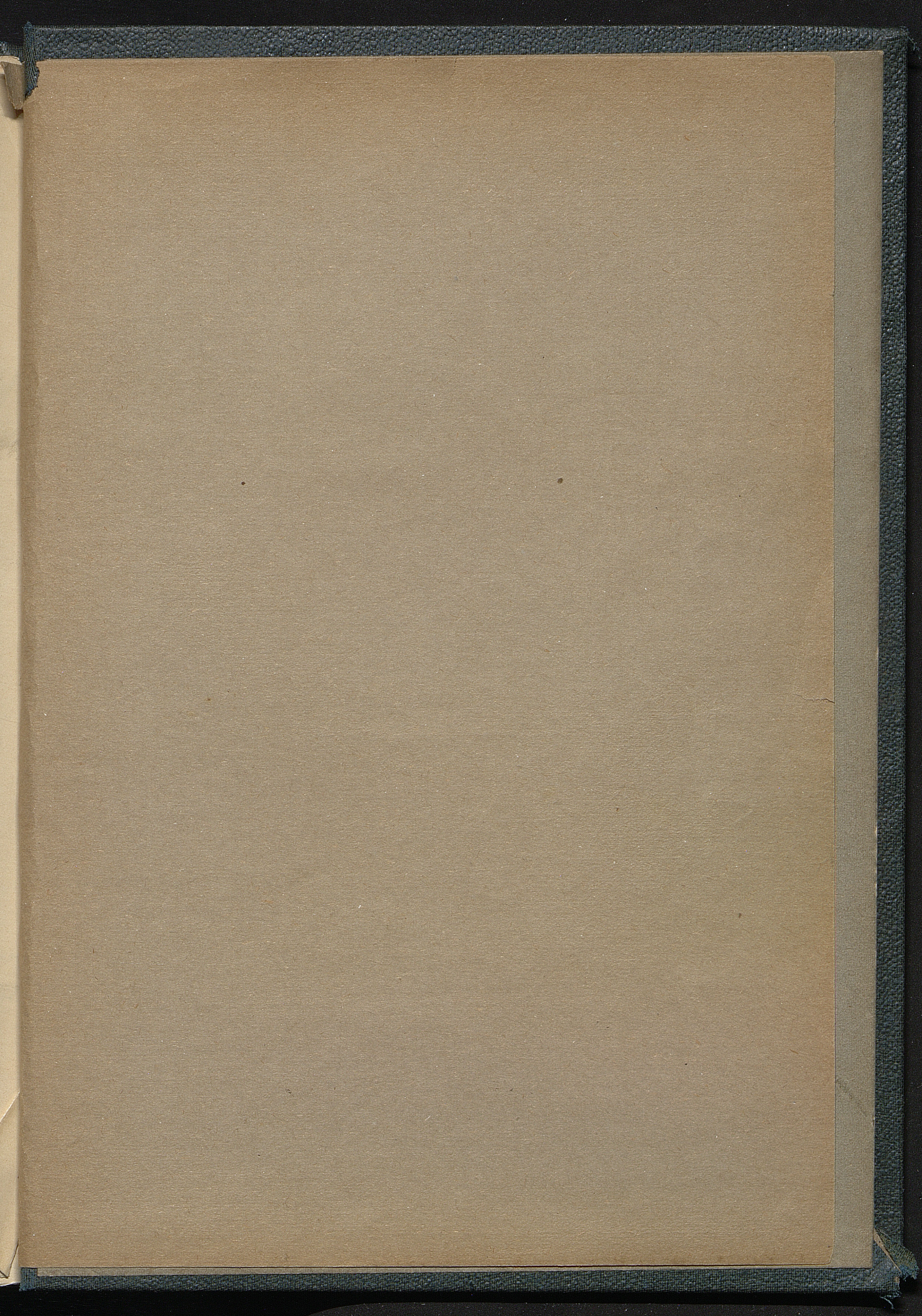
$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Suivant que l'équation caractéristique :

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

a ses racines réelles ou imaginaires, l'intégrale est une exponentielle réelle ou une fonction trigonométrique (sinus). Ds le 1er cas, le galvanomètre est apériodique ; dans le 2e cas, il oscille. Cela dépend de la résistance du circuit du galvanomètre (1er cas quand elle est trop petite 2e cas quand elle est trop grande) La résistance critique correspond au cas intermédiaire, où les racines sont égales c'est alors que le galvanomètre revient le plus rapidement au zéro sans le dépasser — C'est là une réalisation physique des racines imaginaires, et une illustration expérimentale de la formule de Moivre : $e^{xi} = \cos x + i\sin x$, qui a pour conséquence la relation des fonctions circulaires avec les exponentielles imaginaires.


ECOLE NORMALE SUPERIEURE



2e Partie.

4e fascicule.

